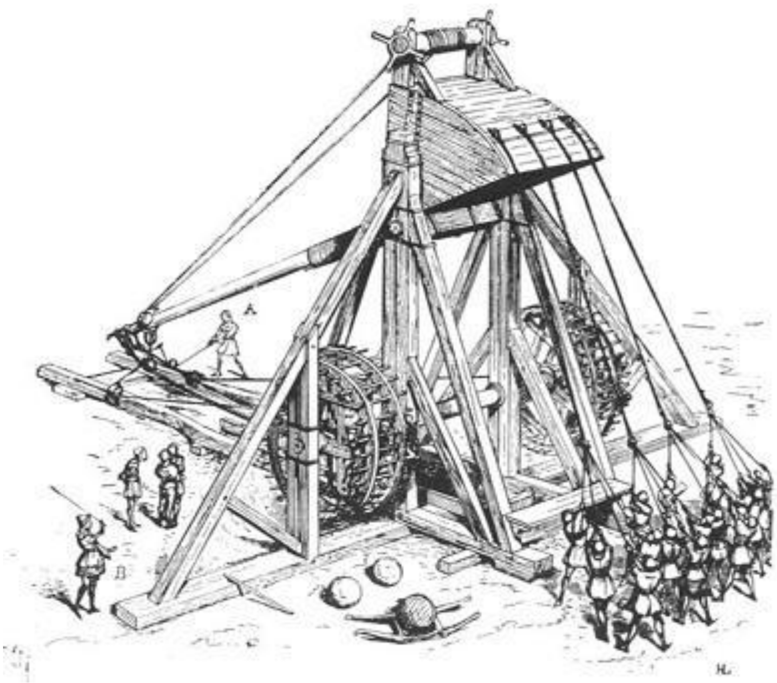
Université Cadi Ayyad

Polycopié d'exercices et examens résolus: Mécanique du point matériel



M. Bourich

édition 2014

AVANT-PROPOS

Ce recueil d'exercices et problèmes examens résolus de mécanique du point matériel est un support pédagogique destiné aux étudiants de la première année de l'école National des Sciences Appliquées de Marrakech. Ces exercices couvrent les quatres chapitres du polycopié de cours de la mécanique du point matériel :

- Outil mathématique : vecteurs et systèmes de coordonnées,
- Cinématique du point matériel,
- Dynamique du point matériel
- Théorèmes généraux,

L'ensemble des exercices et examens résolus devrait permettre aux étudiants :

- de consolider leurs connaissances,
- un entrainement efficase afin de s'assurer que le cours est bien assimillé,
- d'acquérir les outils et techniques nécessaires à leur formation,
- d'initier leurs cultures scientifique en mécanique du point matériel.

Chaque chapitre s'ouvre par la précision des objectifs visés et des prérequis nécessaires . Pour ce mettre en situation d'épreuves, de nombreux exercices et problèmes d'examens supplémentaires sont proposés à la fin de chaque chapitre. Je dois souligner que ce document ne remplace en aucun cas le TD en présentiel.

Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés.

Je souhaite que ce recueil d'exercices et problèmes examens résolus de mécanique du point matériel puisse aider de manière efficace la majorité d'étudiants.

M. Bourich

Illustration de couverture :

ARMES DE SIEGE : MANGONNEAU

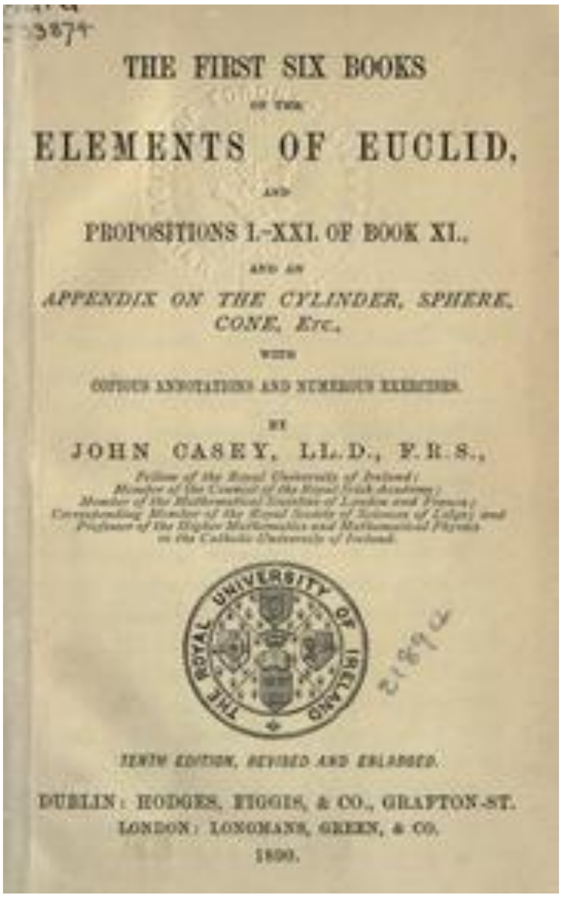
(Source http://tackenn.free.fr/choz-armes.htm)

Cette arme propulse ses projectiles par un système de contrepoids. Cela lui confère une bonne portée et un potentiel destructeur important. Cependant le mangonneau, très haut par rapport à sa surface de base, est assez instable. Cet inconvénient conjugué à son poids empêche l'utilisation de ces armes sur des navires (elles basculeraient avec les mouvements du navire). Pour la même raison, il n'est pas possible de la doter de roues, et cette arme ne peut donc pas être déplacée.

Caractéristiques - Poids : 500 kg - Longeur : 2m × 2 m - Servants : 8 - Portée de 60 à 400 m - Rechargement : 7 min - Temps de visée : 1 min.

Chapitre

1


THE FIRST SIX BOOKS

OF THE

ELEMENTS OF EUCLID,

AND

PROPOSITIONS I.–XXI. OF BOOK XI.,

AND AN

APPENDIX ON THE CYLINDER, SPHERE, CONE, ETC.,

WITH

COPIOUS ANNOTATIONS AND NUMEROUS EXERCISES.

BY

JOHN CASEY, LL.D., F.R.S.,

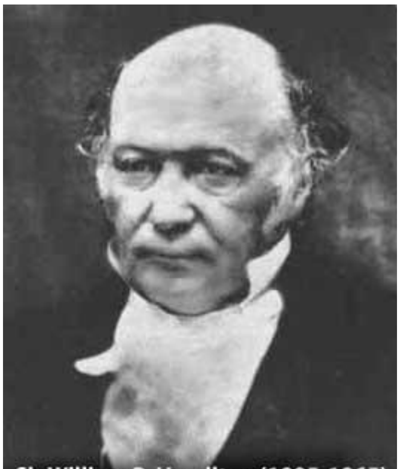
TENTH EDITION, REVISED AND ENLARGED.

DUBLIN: HODGES, FIGGIS, & CO., GRAFTON-ST.

LONDON: LONGMANS, GREEN, & CO.

1890.

Outils mathématique : vecteurs et systèmes de coordonnées


Sir William R. Hamilton (1805-1865)

Galilée : (1564-1642)

Le calcul vectoriel a pris naissance lors des travaux de William R. Hamilton (1805-1865) en 1843 et ceux de Hermann G. Grassmann (1809-1877) en 1844. C'est l'influence de Hamilton qui a prédominé sur les premiers développements de la théorie. Son algèbre des quaternions est une extension du calcul des nombres complexes.

Objectifs :

- Comprendre la notion de base orthonormale directe;
- Apprendre à utilisé les systèmes usuels de coordonnées;
- Assimiler les notions du produit scalaire et vectoriel;

Prérequis :

- Notions sur l'espace vetoriel;
- Notions sur produit scalaire et vectoriel;
- Notions sur les fonctions trigonométriques;

Exercice 1

1- Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur (1,2,2).
2- Pour quelles valeurs de a les vecteurs (1,0,a), (a,1,0) et (0,a,1) sont-ils coplanaires ?

Corrigé :

On commence par normer le vecteur donné. Un vecteur unitaire colinéaire à (1, 2, 2) est $\vec{u}$ = (1/3, 2/3, 2/3). On cherche ensuite un vecteur orthogonal à celui-là. Le vecteur (0, 1,−1) en est un. On le norme en $\vec{v} = (0, {}^{1}/_{\sqrt{2}}, -{}^{1}/_{\sqrt{2}})$. Puis on forme leur produit vectoriel, et on trouve :$\vec{w} = (\frac{-4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$.

La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale directe.

Exercice 2

Déterminer les coordonnées cylindriques puis sphériques du point M (2, $2\sqrt{3}$, 4).

Corrigé :

Soit m le projeté orthogonale de M sur le plan (Oxy). m a pour coordonnées (2, $2\sqrt{3}$, 0). En particulier, on a Om=4 et $\overrightarrow{Om} = 4(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{\jmath})$ ⇒Les coordonnées cylindriques de M sont donc : $(4, \frac{\pi}{3}, 4)$.

Pour déterminer les coordonnées shériques, il faut déterminer la longueur OM et une mesure de l'angle $(\vec{k}, \overrightarrow{OM})$. Les coordonnées sphériques de M sont donc : $(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$.

Exercice 3

La terre étant assimilée à une sphère de rayon R, calculer la distance a vol d'oiseau entre le point A de longitude θ_1 et de latitude $\emptyset_1$ et le point B de θ_2 et de latitude $\emptyset_2$.
On rappelle que cette distance est donnée par la longueur de l'arc de cercle intersection de la sphère et du plan OAB.
Application numérique : Calculer la distance entre Paris (48°49'N, 2°19'E) et Buenos Aires (34°40'S, 58°30'W). On prendra R = 6378.

Corrigé :

Soit l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Alors la distance recherchée est $R\alpha$. Par ailleurs,

le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ est égal à $R^2 cos\alpha$. Reste à calculer ce produit scalaire ce que l'on

va faire en écrivant les coordonnées cartésiennes des points. On a en effet :

$$A\begin{pmatrix} Rcos\emptyset_1 cos\theta_1 \\ Rcos\emptyset_1 sin\theta_1 \\ Rsin\emptyset_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B\begin{pmatrix} Rcos\emptyset_2 cos\theta_2 \\ Rcos\emptyset_2 sin\theta_2 \\ Rsin\emptyset_2 \end{pmatrix}$$

La distance recherchée vaut donc : $d = Rarccos(cos\emptyset_1 cos\emptyset_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + sin\emptyset_1 sin\emptyset_2)$.

Ici, il faut faire attention au fait que la latitude est comptée vers le sud, et la longitude vers l'ouest. Le calcul donne une distance d'environ 11070 kilomètres

Exercie 4

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{\omega}$ trois vecteurs de l'espace et soit $a \epsilon \Re$. On considère l'équation vectorielle d'inconnue $\vec{x}$: $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$.

1. Montrer que si l'équation admet une solution, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. On supposera dans la suite que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2. Déterminer toutes les solutions colineaires à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

3. En déduire toutes les solutions de l'équation.

4. Déterminer les vecteurs solutions qui verient en outre $\vec{x}.\vec{\omega} = a$.

Corrigé :

1. Supposons que l'équation admette une solution $\vec{x}$. Alors :$\vec{v}.\vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{x}).\vec{u} = 0$

puisque $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

2. Posons $x = k\vec{u} \wedge \vec{v}$ et calculons $\vec{u} \wedge \vec{x}$:

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = -k\|u\|^2\vec{v}$$

Ou on a où on a utilisé la formule du double produit vectoriel. On a donc $\vec{u} \wedge \vec{x} = -k\|u\|^2\vec{v}$ si et seulement $k = -\frac{1}{\|u\|^2}$. Il existe donc une solution unique colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

3. Soit $\vec{x}_0$ la solution particulière précédente et soit $\vec{x}$ une solution de l'équation. Alors, on tire : $\vec{u} \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$

ce qui entraine que $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{u}$. Réciproquement, on vérifie facilement que tout vecteur s'écrivant $\vec{x}_0 + \lambda\vec{u}$ est solution.

4. On introduit la solution précédente dans la nouvelle équation, et on trouve que λ doit

Vérifier : $\vec{x}_0.\vec{\omega} + \lambda\vec{u}.\vec{v} = a$

On distingue alors deux cas :

- Si $\vec{v}.\vec{u} \neq 0$, on a une unique solution donnée par : $\lambda = \frac{a-\vec{x}_0.\vec{\omega}}{\vec{u}.\vec{v}}$.
- Si au contraire $\vec{v}.\vec{u} = 0$, alors on n'a pas de solution si $\vec{x}_0.\vec{\omega} \neq a$, ou au contraire tous

les éléments de la forme $\vec{x}_0 + \lambda\vec{u}$ sont solutions si $\vec{x}_0.\vec{\omega} = a$.

Exercie 5

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormée.
1. Donner une équation cartésienne du plan paramétré par :

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2u \\ y = 2 + t + u \\ z = 3u \end{cases}$$

2. Donner une représentation paramétrique du plan d'équation $x + 2y - z - 3 = 0$.
3. Donner un système d'équations définissant la droite dont une paramétrisation est :

$$\begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = 3t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite donnée par le système d'équation :

$$\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

Corrigé :

1. La méthode consiste à remarquer que $\vec{u}$ = (1, 1, 0) et $\vec{v}$ = (2, 1, 3) sont deux vecteurs directeurs non colinéaires de P. Un vecteur normal de P est donc $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$= (3,−3,−1).
Une équation du plan P est alors de la forme 3x − 3y − z + d = 0. On détermine d en remarquant que le point A(1, 2, 0) appartient à P. On trouve finalement d = 3.
2. Il suffit de choisir deux coordonnées comme paramètres. Notons P_1 le plan. On a :

$$(x, y, z)\epsilon P_1 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2y + z + 3 \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Une représentation paramètrique de P1 est donc donnée par :

$$\begin{cases} x = -2t + u + 3 \\ y = t \\ z = u \end{cases}$$

3- La dernière équation donne t = z − 3. On remplace dans les deux autres pour trouver un système d'équations :

$$\begin{cases} x - 4z + 7 = 0 \\ y - 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

4- On choisit une des coordonnées comme paramètres, et on utilise la méthode du pivot pour exprimer les deux autres coordonnées en fonction de ce paramètre. Notant (D) la droite,

$$\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 2 \\ z = z \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (D) est donc donnée par :

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = t \end{cases}$$

Exercie 6

A tout réel t, on associe le point M(t) de coordonnées $x(t) = \cos t + \sqrt{3}\sin t + 1$, $y(t) = \cos t - \sqrt{3}\sin t + 1$ et $z(t) = -2\cos t + 1$.

1. Calculer $x(t) + y(t) + z(t)$.

2. Calculer $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)$.

3. En déduire que M(t) est toujours élément d'un cercle dont on precisera le centre et le rayon.

Corrigé :

1. La Un calcul direct prouve que $x(t)+y(t)+z(t) = 3$. Ainsi, le point M(t) est toujours élément du plan P d'équation $x + y + z = 3$.

2. Un calcul direct prouve que $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 9$. Ainsi, le point $M(t)$ est toujours élément de la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

3. $M(t)$ est toujours sur le cercle C intersection de P et de S. Le centre de ce cercle est le projeté orthogonal de O, centre de la sphère, sur le plan P. On cherche donc $A(x, y, z) \in$ P tel que le vecteur $\overrightarrow{OA}(x, y, z)$ est colinéaire à $\vec{u}(1, 1, 1)$ (vecteur normal du plan). On trouve $A(1, 1, 1)$. Pour trouver le rayon du cercle, on peut calculer la distance $AM(0)$ par exemple. Puisque $M(0)$ a pour coordonnées $(2, 2, -1)$, on trouve $AM(0) = \sqrt{6}$. On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle $OAM(0)$, qui est rectangle en A.
On trouve à nouveau

$$AM(0)^2 = OM(0)^2 - OA^2 = 9 - 3 \text{ soit } AM(0) = \sqrt{6}.$$

Exercie 7

Soit S une sphère de centre O et de rayon $R > 0$. Soient également deux points A et B de S. On cherche a déterminer, parmi les arcs de cercle tracés sur la sphère et joignant A et B, celui qui est le plus court. Soit C un tel arc de cercle, intersection du plan P et de S. On note H le projeté orthogonal de O sur P, r le rayon de l'arc de cercle, $a = AB$, et θ l'angle $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB})$.

1. Démontrer que $\sin(\theta/2) = a/2r$.
2. En déduire que la longueur de C est $\frac{a\theta}{2\sin(\theta/2)}$.
3. Démontrer que $\theta \geq 2\arcsin(a/2R)$.
4. Conclure.

Corrigé :

1. Le triangle HAB est isocèle en H, avec HA = HB = r, AB = a, et θ l'angle en H. On en déduit immédiatement la relation demandée (par exemple en considérant le triangle rectangle HCB, où C est le milieu de [AB], et en écrivant les relations trigonométriques dans ce triangle).

2. La longueur de l'arc de cercle est $l = r\,\theta$. Il suffit alors de remplacer r par la valeur trouvée

précédemment.

3. Dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, la fonction sin est croissante. De plus, on sait que $r \leq R$. On en déduit que :

$$\sin(\theta/2) \geq \frac{a}{2R} \Rightarrow \theta \geq 2\arcsin\left(\frac{a}{2R}\right)$$

4. La longueur de l'arc de cercle vaut $f(\theta) = \frac{a\theta}{2\sin(\theta/2)}$, où θ parcourt l'intervalle [2 arcsin(a/2R), π]. Mais f est dérivable sur cet intervalle, et sa dérivée vaut :

$$f'(\theta) = \frac{a\cos(\theta/2)\,(2\tan(\theta/2) - \theta)}{4\sin^2(\theta/2)}$$

Or, sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $\tan(x) \geq x$, et donc $f'(\theta) \geq 0$. Ainsi, f est croissante, et la longueur minimale est atteinte au début de l'intervalle, c'est-à-dire pour $\theta = 2\arcsin(a/2R)$, où, ce qui est plus clair, pour r = R. Les plus courts arcs de cercle allant de A et B et tracés sur la sphère sont donc les arcs de grand cercle. Ils sont donnés par l'intersection de la sphère et du plan défini par les trois points O, A,B. Si ces trois points ne sont pas alignés, il existe un seul grand cercle passant par A et B.

En particulier, bien que Lyon et Montréal soit sensiblement à la même latitude, un avion effectuant ce trajet n'emprunte pas le parallèle, mais un arc de grand cercle qui l'emmène bien plus au nord.

Exercices complémentaires

Exercie 8

Par rapport au repère $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$orthonormé direct, soit $\vec{U}=(0,3,1)$ et $\vec{V}=(0,1,2)$

a) Calculer $\vec{U}.\vec{V}$ et l'angle $\varphi=(\vec{U},\vec{V})$.
b) Déterminer les cosinus directeurs de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.
c) Calculer les composantes de $\vec{W}=\vec{U}\wedge\vec{V}$; puis $\|\vec{W}\|$ par deux méthodes différentes.
d) Calculer le produit mixte $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$.

Exercie 9

Dans le plan , considérons les points A(-2;3) , B(3;4) et C(0;7) .

a. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Calculer les coordonnées du point situé au quart (à partir de A) du segment [AB].

c. Déterminer D tel que ABCD soit un parallélogramme.

d. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ? Comment cela se manifeste-t-il algébriquement via un calcul avec les composantes ?

e. Ecrire $\overrightarrow{AB}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, géométriquement, puis algébriquement.

Exercie 10

Etant donnés trois vecteurs $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, on considère le double produit vectoriel :

$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$.

1- Calculer les composantes du double produit vectoriel.
2- En déduire la relation : $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\vec{\mathrm{b}}(\vec{\mathrm{c}}.\vec{\mathrm{a}})-\vec{\mathrm{c}}(\vec{\mathrm{a}}.\vec{\mathrm{b}})$
3- Montrer que si $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ sont perpendiculaires, on a : $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$
La réciproque est-elle vraie ?

Exercie 11

Etant donnés deux vecteurs orthogonaux $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$.

a) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{W}$ orthogonal à $\vec{U}$ tel que : $\vec{W}\ \wedge\ \vec{U}=\vec{V}$.

b) En déduire que la solution générale de la division vectorielle est : $\vec{A} = \vec{W} + \lambda\vec{U}$.

Exercie 12

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Soit C le cercle de centre O et de rayon R situé dans le plan (O, x, y). Soit P un point du cercle, tel que (OP) forme un angle θ avec l'axe (Ox) (avec $0 < \theta < \pi/2$).

1. Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{OP}$.

2. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{v}$ tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$soit orthonormée directe.

3. En déduire l'équation de la droite (D) tangente au cercle au point P.

4. Soit A le point d'intersection entre (D) et (Ox), et B entre (D) et (Oy). Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis sa norme. Discuter les cas : $\theta = \pi/4$, $\theta \to 0$, $\theta \to \pi/2$.

Exercie 13

Soient $B_0 = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, $B_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$, $B_2 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ et $B_3 = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ quatre bases orthonormées directes de IR^3, d´efinies telles que :

- B_1 s'obtient de B_0 par une rotation d'angle ψ autour de $\vec{k}$.
- B_2 s'obtient de B_1 par une rotation d'angle θ autour de $\vec{u}$.
- B_3 s'obtient de B_2 par une rotation d'angle φ autour de $\vec{z}$.

Les angles (ψ, θ, φ) sont appelés angles d'Euler.

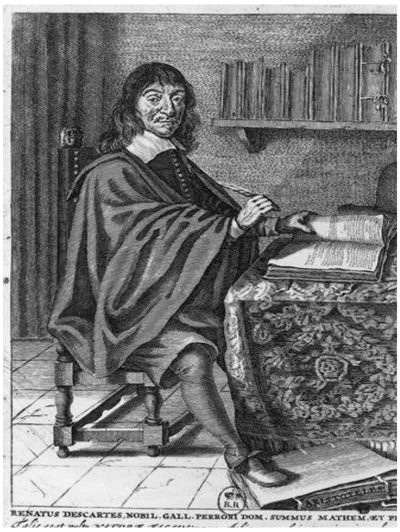
1. Exprimer dans B_0 les vecteurs unitaires de B_1, B_2 et B_3, puis les vecteurs $\vec{\imath} \wedge \vec{u}$; $\vec{\imath} \wedge \vec{v}$; $\vec{\jmath} \wedge \vec{z}$, $\vec{k} \wedge \vec{x}$; $(\vec{\omega} \wedge \vec{y}) \wedge \vec{\imath}$.

2. Soit $\vec{\Omega} = \alpha\vec{k} + \beta\vec{u} + \delta\vec{z}$. Exprimer $\vec{\Omega}$ dans chacune des bases. $(\vec{\Omega} \wedge \vec{k}).\vec{x}$ et $(\vec{\Omega} \wedge \vec{x}).(\vec{\Omega} \wedge \vec{k})$.

Chapitre

2

Cinématique du Point Matériel



René Descartes : (1596-1650)

René Descartes a écrit les principes de la philosophie en 1644, dont l'objectif est de " donner des fondements rigoureux à la philosophie". La physique cartésienne est fondée sur l'identification de la matière avec la quantité géométrique : la pesanteur et le mouvement sont ramenés à une explication mécaniste. Sa description du monde est essentiellement **cinématique**, le mouvement se transmettant de proche en proche par contact. Dans les Principes de la Philosophie, Descartes distingue la cause première de tous les mouvements (Dieu, auteur de la nature), des causes secondes appelées les lois De la nature, qui régissent le mouvement des parties de la matière.

Objectifs :

- Décrire les caractéristiques d'un mouvement : vitesse, accélération, trajectoire ;
- Définir le vecteur rotation ;
- Différencier entre réferentiels absolu, relatif et d'étude ;
- Illustrer la distinction entre vitesse absolue, relative et d'entrainement (relation de transfert) ;
- Comprendre et utilisé la formule de compostion des accélérations;
- Apprendre à choisir le bon système de coordonnées en fonction du problème étudié;
- Classer les référentiels d'utilisation en fonction de leur caractère galiléen approché.

Prérequis :

- Notions sur la dérivée et l'intégration vues en mathématiques;
- Notions en mathématique concernant les coniques (ellipse, hyperbole, parabole).

Exercice 1 :

Au tennis, un lob est réussi lorsque la balle passe audessus de l'adversaire et retombe avant la ligne de fond de court (12m du filet). Le joueur 1, situé à d_1 = 2m du filet (de hauteur 1m), tape la balle à une hauteur z_0 = 30cm et lui communique une vitesse $\vec{v}_0$ contenue dans un plan vertical, de valeur v_0=36 km.h^{-1}, et formant un angle α=60° avec l'horizontale. On négligera les forces de frottement. On prendra g = 9,8m.s^{-2}.

1. Déterminer les équations horaires du centre d'inertie G de la balle dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{k})$ représenté sur la figure (la balle est frappée à la date t = 0).

2. En déduire l'équation de la trajectoire de la balle.

3. La balle passe-t-elle au dessus du filet ?

4. Le joueur 2 est de l'autre coté du filet. Il tend sa raquette verticalement pour essayer de toucher la balle : le tamis de sa raquette est alors situé à une hauteur h = 2,3m. A quelle distance du filet le joueur 2 doit-il se placer ?

5. Si le joueur 2 se trouve à une distance d_2 = 4m du filet, peut-il intercepter la balle ? Le lob est-il réussi ?

6. Caractériser le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la balle lors de son impact sur le sol.

Corrigé :

1. La méthode est rigoureusement la même que pour l'exercice de ballistique. On a avec le PFD en réf galiléen :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 cos\alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t cos\alpha \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{gt^2}{2} + v_0 t sin\alpha + z_0 \end{cases}$$

2. Trajectoire : on élimine le temps :

$$z = -\frac{gx^2}{2(v_0 cos\alpha)^2} + x tan\alpha + z_0$$

3. Au niveau du fil, x = d_1 = 2m$\Rightarrow$ z = 3m > 1m, la balle passe.

4. On trouve la distance x1 entre le joueur 1 et le joueur 2 en imposant h dans l'équation de la trajectoire : 2 solutions :

$x_{1'}$ = 1,4m ne convient pas, car dans le terrain du joueur 1.

$x_{1''}$ = 7,5m convient, le joueur 2 doit donc se placer à 5,5m du filet.

5. Si d_2 = 4m, il est trop près du filet, le lob réussi si la balle atterri dans le court, donc si pour z = 0, x < 14m. On vérifie que cela fonctionne : x(z=0) = 7m.

6. A l'impact :

$$\begin{cases} v_x = v_0 cos\alpha = 5m/s \\ v_y = 0 \\ v_z = -g\dfrac{x}{v_0 cos\alpha} + v_0 sin\alpha = -9m/s \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_z}^2} = 10.3\, m/s$$

Angle avec le sol : $tan\beta = \frac{|v_z|}{v_x} = 1.8 \Rightarrow \beta = 61^{\circ}$

Exercice 2 :

Un skieur aborde successivement les différentes parties d'une pente dont le profil est schématisé ci-contre.

1. Il remonte à vitesse constante la piste AB inclinée d'un angle α=30° par rapport à l'horizontale. Il est tracté par la perche d'un téléski qui exerce une force de traction ayant même direction que la perche. Elle forme un angle β = 20° avec la pente. L'ensemble des forces de frottement exercées par la neige sur les skis et l'air sur le skieur est équivalent à une force unique $\vec{F}_1$ de valeur 65N, opposée au mouvement. Calculer la valeur de la force de traction exercée par la perche.

2. Arrivé au sommet de la pente en B, il lâche la perche avec une vitesse 3,2m.s^{-1}. Il est alors sur une surface plane et horizontale. Quelle distance va-t-il parcourir avant de s'arrêter, en admettant que l'ensemble des forces de frottement est équivalent à une force de valeur F_2=42N ?

3. Il aborde ensuite une pente CD inclinée d'un angle α' = 35° par rapport au plan horizontal. La valeur des forces de frottement peut plus être considérée comme constante et on admettra qu'elle est proportionnelle au carré de la vitesse $F_3 = kv^2$, avec k = 0,56N.s^{-2}.m^{-2}. Quelle vitesse limite v_{lim} le skieur peut-il atteindre ?

4. Il aborde un tremplin de saut EF incliné d'un angle =15° par rapport à l'horizontale. Pour simplifier l'étude, on ne prendra pas en compte les forces exercées par l'air. Par ailleurs, on considérera que sa vitesse en F vaut 25m.s^{-1}.

Calculer la longueur du saut s'il retombe sur une surface plane et horizontale située à 5m au dessous de F.

Données : masse du skieur m = 80kg, pesanteur g = 9,8m.s^{-2}.

Corrigé :

Bien penser à faire l'inventaire des forces pour chacune des phases, et un PFD dans le référentiel terrestre qui peut être supposé galiléen…

1. Tension de la perche :

$$T = \frac{F_1 + mgsin\alpha}{cos\beta} = 486\ N$$

2. Distance parcourue : $x - x_0 = 9.8\ m$

4. Même problème que la balistique : on injecte y = -5m dans l'équation de la trajectoire : équation du second degré à résoudre, qui nous donne x_1 = 46,3m.

Exercice 3 :

Soient $\Re(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère cartésien muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\Re'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ le repère cylindrique muni de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Considérons un point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et cylindriques (ρ, φ, z).

1) Faire une représentation des vecteurs des deux bases associées à $\Re$ et $\Re'$ et des coordonnées du point M.

2) Donner les expressions du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et du déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ dans les deux repères $\Re$ et $\Re'$.

3) En déduire la surface et le volume d'un cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon R.

4) Déterminer les expressions de x, y et z en fonction de ρ, φ et z.

5) Déterminer les expressions de ρ, φ et z en fonction de x, y et z.

6) Déterminer les expressions de $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ en fonction de ρ, φ et z et leurs dérivées par rapport au temps $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ et $\dot{z}$.

7) Déterminer les expressions des vecteurs de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ en fonction de celles de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

Corrigé :

1. voir polycopié du cours.

2. Dans $\Re(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\vec{k}$.

Dans $\Re'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$: : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$ et $d\overrightarrow{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}$.

3. la surface et le volume d'un cylindre d'axe (Oz), de hauteur h et de rayon R sont données par :

$$S = \iint d^2S = \iint \rho d\rho d\varphi = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2$$

$$V = \iiint d^3V = \iiint \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = 2\pi Rh$$

4. les expressions de x, y et z en fonction de ρ, φ et z : $\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

5. les expressions de ρ, φ et z en fonction de x, y et z : $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \\ z = z \end{cases}$

6. les expressions de $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$ en fonction de ρ, φ et z et leurs dérivées par rapport au temps $\dot{\rho}$, $\dot{\varphi}$ et $\dot{z}$: $\begin{matrix} \dot{x} = \dot{\rho} cos\varphi + \rho\dot{\varphi} sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{\rho} sin\varphi - \rho\dot{\varphi} cos\varphi \\ \dot{z} = \dot{z} \end{matrix}$

7. les expressions des vecteurs de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ en fonction de celles de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$:

$$\begin{cases} \vec{\imath} = cos\varphi \vec{e}_\rho - sin\varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{\jmath} = sin\varphi \vec{e}_\rho + cos\varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Exercice 4

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $\Re(O, xyz)$ muni de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les coordonnées du point M dans le référentiel $\Re$ sont données par :

$x(t) = t + 1$, $y(t) = t^2 + 1$ et $z(t) = 0$. (t étant le temps)

1. Donner l'équation de la trajectoire de M dans $\Re$. En déduire sa nature.

2. Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$ du point M.

Corrigé :

1. on a : $y(t) = t^2 + 1 = (x(t) - 1)^2 + 1$: c'est l'équation d'une parabole.

2. la vitesse $\vec{V}\left(\frac{M}{\Re}\right) = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} = \vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$

et l'accélération $\vec{\gamma}\left(\frac{M}{\Re}\right) = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} = 2\vec{\jmath}$

Exercice 5

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $s(t)$. Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est $\vec{V}(M/\Re)$ de module V. On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$ telle que $\vec{V}(M/\Re) = V\vec{\tau}$.

1) Que désignent les vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$?

2) Quelle relation existe-t-il entre $s(t)$ et V ?

3) Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\Re$ est donné par :

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n}$$

R_c étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

4) Exprimer R_c en fonction de $\vec{V}(M/\Re)$ et $\vec{\gamma}(M/\Re)$.

Corrigé :

On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $s(t)$. Le vecteur vitesse du point M dans un repère orthonormé direct $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est $\vec{V}(M/\Re)$ de module V. On définit la base locale (ou base de Frenet) $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$ telle que $\vec{V}(M/\Re) = V\vec{\tau}$.

1) Que désignent les vecteurs $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$?

$\vec{\tau}$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M et de même sens que le mouvement

$\vec{n}$: Vecteur unitaire normal à la trajectoire en M et dirigé vers le centre de la courbure

$\vec{b}$: Vecteur unitaire $\perp$ au plan qui contient les deux vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$

2) Quelle relation existe-t-il entre $s(t)$ et V ?

$$V = \frac{ds(t)}{dt}$$

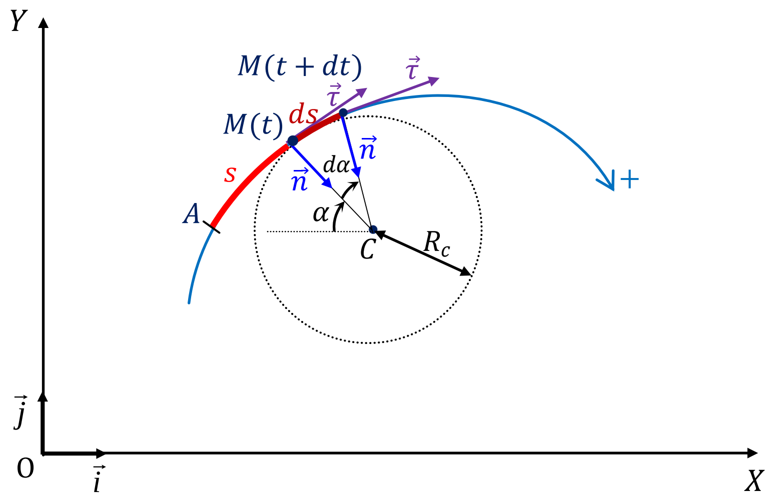
3) Montrer que le vecteur accélération du point M dans le repère $\Re$ est donné par :

$$\vec{\gamma}\left(\frac{M}{\Re}\right) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n} \quad ;$$

R_c étant le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M.

On a : $\vec{V}(M/\mathfrak{R}) = V\vec{\tau} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + V\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

Reste à chercher $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Pour cet effet, on va considérer un point matériel en mouvement sur une trajectoire curviligne contenue dans le plan (xOy):



De sa part, le terme $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ peut s'écrire sous la forme : $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}$

Et comme $\quad ds = R_c d\alpha \quad$ et $\quad \frac{d\vec{\tau}}{d\alpha} = \vec{n} \quad$ et $\quad \frac{ds}{dt} = V$

On obtient alors : $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{V}{R_c}\vec{n}$

Par conséquent : $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n}$

4) Exprimer R_c en fonction de $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$:

On a : $\vec{V}(M/\mathfrak{R}) = V\vec{\tau} \quad$ et $\quad \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n}$

$$\Longrightarrow \quad \vec{V}(M/\mathfrak{R}) \wedge \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \frac{V^3}{R_c}\vec{b} \qquad (\text{car } \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{b})$$

$$\Longrightarrow \quad \left\|\vec{V}(M/\mathfrak{R}) \wedge \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\right\| = \frac{\left\|\vec{V}\right\|^3}{R_c} \qquad \left(\text{car } \left\|\vec{b}\right\| = 1 \text{ et } V = \left\|\vec{V}(M/\mathfrak{R})\right\|\right)$$

$$\Longrightarrow \quad R_c = \frac{\left\|\vec{V}(M/\mathfrak{R})\right\|^3}{\left\|\vec{V}(M/\mathfrak{R}) \wedge \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\right\|}$$

Exercice 6

Dans un référentiel $\Re$, un point M décrit un cercle de centre O et de rayon r avec une vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ de module $\|\vec{V}(M/\Re)\| = \frac{V_0}{1+\alpha t}$ où V_0 et α sont deux constantes positives.

1) Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ du point M sachant que $s(t=0)=0$.

2) En déduire la durée du 1^{er} tour effectué par le point M.

3) Exprimer $\vec{\gamma}(M/\Re)$ l'accélération du point M dans la base de Frénet.

Corrigé :

1. on a : $s(t) = \int ds(t) = \int \|\vec{V}(M/\Re)\| dt = \int \frac{V_0}{1+\alpha t} dt = \frac{V_0}{\alpha}\ln(1+\alpha t) + \overbrace{cte}^{0}$

2. la durée du 1^{er} tour effectué par le point M :

$$s(t_1) = \frac{V_0}{\alpha}\ln(1+\alpha t_1) = 2\pi \Rightarrow t_1 = \frac{1 - e^{\frac{2\pi\alpha}{V_0}}}{\alpha}$$

3. l'accélération du point M dans la base de Frénet :

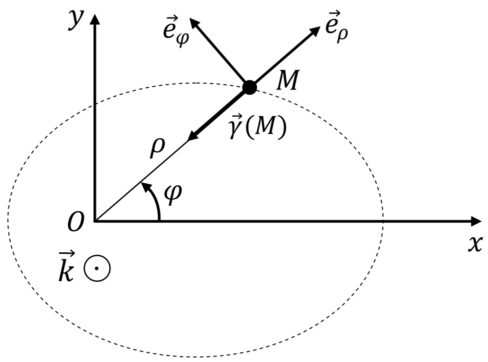
$$\vec{\gamma}\left(\frac{M}{\Re}\right) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{V_0}{1+\alpha t}\right)\vec{e}_\varphi\right] = -\frac{V_0}{1+\alpha t}\dot{\varphi}\vec{e}_\rho - \frac{\alpha V_0}{(1+\alpha t)^2}\vec{e}_\varphi$$

Exercice 7

Considérons un point matériel M de masse m qui décrit dans un référentiel fixe $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, supposé galiléen, une trajectoire située dans le plan (xoy) de façon à ce que son accélération passe toujours pas un point fixe O (mouvement à accélération centrale).

Un mouvement est dit à accélération centrale s'il existe un point fixe O tel que, pour tout instant t, le vecteur accélération du point M, $\vec{\gamma}(M/\Re)$, est colinéaire au vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Il en découle :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{0}$$



Soit $\vec{c}$ le vecteur défini par : $\vec{c} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/\Re)$

1) Montrer que $\vec{c}$ est un vecteur constant.

2) Déduire que le moment cinétique de M par rapport à O est constant.

3) Donner l'expression de $\vec{c}$ en coordonnées polaires (ρ, φ).

4) Donner $c = \|\vec{c}\|$ en fonction de ρ et $\dot{\varphi}$. Déduire de $c = cte$ que $2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 0$.

5) On pose $u = \dfrac{1}{\rho}$,démontrer que $\vec{V}(M/\Re) = -c\dfrac{du}{d\varphi}\vec{e}_\rho + cu\vec{e}_\varphi$.

Corrigé

1- Montrer que $\vec{c}$ est un vecteur constant :

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \overbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{V}\left(\frac{M}{\Re}\right)}^{\vec{0}} + \overbrace{\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/\Re)}^{\vec{0}} = \vec{0}$$

2 et 3. le moment cinétique de M par rapport à O est donné par :

$\vec{c} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}\left(\frac{M}{\Re}\right) = \rho\vec{e}_\rho \wedge \left(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right) = \rho^2\dot{\varphi}\vec{e}_z.$

4. $c = \rho^2\dot{\varphi}$ et l'accélération est centrale, donc le terme selon la trajectoire est nul :

$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 0.$

5. On a : $\vec{V}\left(\frac{M}{\Re}\right) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -c\frac{du}{d\varphi}\vec{e}_\rho + cu\vec{e}_\varphi.$

Exercice 8

Soit un repère cartésien a deux dimensions (O,x,y) muni d'une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
On s'intéresse au mouvement plan du véhicule d'un manège pouvant se deplacer sur un rail grâce a un système d'entrainement a courroie situé sous lui. Le centre de gravité du véhicule est noté G(x; y) et sa masse est m. Sur une certaine portion G_1G_3 du circuit, le mouvement de G est décrit par les équations paramétriques du temps t > 0 suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t \\ y(t) = \beta(t - t_0)^2 \end{cases}$$

Ou α , β et t_0 sont des constantes strictement positives. Ce mouvement est limité à l'intervalle de temps $[\frac{t_0}{2}, 2t_0]$ correspondant au passage du centre de gravité de G_1 à G_3.

1. Déterminez les coordonnées de G aux instants $\frac{t_0}{2}, t_0$ et $2t_0$. Portez sur le graphique vierge les trois positions correspondantes notées respectivement G_1, G_2 et G_3 (on ne modifiera pas l'échelle proposée).
2. Trouvez l'équation cartésienne y(x) de la trajectoire Γ. Dessinez précisément cette trajectoire sur le graphique.
3. Déterminez les composantes cartésiennes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ du point matériel. En déduire la nature du mouvement.
4. On munit Γ d'une abscisse curviligne s(t) dont l'origine est prise au point G1. Montrez, grâce a un changement de variable appropriée, que la distance totale parcourue sur la portion de rail considérée peut se mettre sous la forme :

$$s(2t) = \alpha t_0 \int_{-1/2}^{1} \sqrt{1 + Cu^2}\, du$$

où l'on explicitera la constante C (on ne cherchera pas à calculer $s(2t_0)$).
5. Trouvez une valeur approchée de $s(2t_0)$ dans les deux cas suivants: i) $C \gg 1$ et ii) $C \ll 1$. Discutez les résultats obtenus.

Dans cette seconde partie, on se propose de caractériser les forces qui agissent sur le véhicule et que l'on supposera au nombre de trois: la réaction normale $\vec{N}$ du support, la force d'entrainement $\vec{E}$ tangentielle du véhicule par la courroie, et le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$. Les quatre roues du véhicule tournent librement sans occasionner de frottements.

6. Exprimez la résultante $\vec{R}$ en fonction des forces en présence d'une part, et en fonction de m et d'autre part. Portez qualitativement sur le dessin donne en annexe ces forces, notamment la résultante $\vec{R}$ (on reportera ces forces au niveau du centre de gravité G du véhicule).

7. Déterminez les composantes cartésiennes du vecteur unitaire $\vec{e}_t$ tangent à Γ en tout point et dirigé dans le sens du mouvement (on pourra s'inspirer des résultats de la question 3 de la Partie 1). En déduire les composantes du vecteur unitaire $\vec{e}_n$ normal à Γ. Reportez la base Sénet-Frénet sur le graphique en G_2.

8. Exprimez les composantes normale et tangentielle de $\vec{R}$, puis celles du poids.

9. Trouvez l'expression du module des forces $\vec{E} = E\vec{e}_t$ et $\vec{N} = N\vec{e}_n$. La réaction du support peut-elle s'annuler ? Et la force d'entrainement ? (on précisera éventuellement à quel(s) endroit(s) sur Γ).

10. La construction du rail doit être soigneusement étudiée selon la réaction que celui-ci doit développer au passage du véhicule. Précisez s'il est un endroit où le rail doit être renforcé.

Corrigé

1. $G\left(\frac{t_0}{2}\right) = \begin{cases} \frac{x_1}{\alpha t_0} = \frac{1}{2} \\ \frac{y_1}{\beta t_0^2} = \frac{1}{4} \end{cases}$, $\quad G(t_0) = \begin{cases} \frac{x_2}{\alpha t_0} = 1 \\ \frac{y_2}{\beta t_0^2} = 0 \end{cases}$ et $\quad G(2t_0) = \begin{cases} \frac{x_3}{\alpha t_0} = 2 \\ \frac{y_3}{\beta t_0^2} = 1 \end{cases}$

2. l'équation cartésienne y(x) de la trajectoire Γ : $y = \beta t_0^2 (\frac{x}{\alpha t_0} - 1)^2$ c'est l'équation d'une parabole.

3. Les composantes cartésiennes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ du point matériel :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\beta(t - t_0) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}\begin{pmatrix} 0 \\ 2\beta > 0 \end{pmatrix}$$

Le mouvement est uniforme selon la direction x, uniformement accélére selon la direction y. La trajectoire est une portion de parabole.

4.

$$\int_{\frac{t_0}{2}}^{2t_0} ds = s(2t) - s\left(\frac{t_0}{2}\right) = \int_{\frac{t_0}{2}}^{2t_0} \alpha \sqrt{1 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2}(t-t_0)^2 dt}$$

En posant $u = \frac{t}{t_0} - 1$, alors $t_0 du = dt$, d'ou

$$s(2t) = \overbrace{s\left(\frac{t_0}{2}\right)}^{0} + \alpha t_0 \int_{-1/2}^{1} \sqrt{1 + Cu^2}\, du = \alpha t_0 \int_{-1/2}^{1} \sqrt{1 + Cu^2}\, du$$

5. Si C ≪ 1 : on a

$$s(2t) = \alpha t_0 \int_{-1/2}^{1} \sqrt{1 + Cu^2}\, du \approx \frac{3}{2} \alpha t_0$$

La parabole est dans ce cas de courbure très faible.

Si C ≫1 : on a

$$s(2t) = \alpha t_0 \int_{-1/2}^{1} \sqrt{1 + Cu^2}\, du \approx \frac{5}{4} \beta t_0^2$$

La parabole est au contraire très piquée.

6. La résultante des forces s'écrit : $\vec{R} = \vec{E} + \vec{N} + \vec{P} = 2m\beta\vec{e}_y$.

7. Les composantes cartésiennes du vecteur unitaire $\vec{e}_n \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\|\vec{v}\|} \\ \frac{2\beta(t-t_0)}{\|\vec{v}\|} \end{pmatrix}$

Les composantes du vecteur unitaire $\vec{e}_n$ normal à Γ : $\vec{e}_n \begin{pmatrix} \frac{-2\beta(t-t_0)}{\|\vec{v}\|} \\ \frac{\alpha}{\|\vec{v}\|} \end{pmatrix}$

8. Les composantes normale et tangentielle de $\vec{R}$:

$$\vec{R} \begin{pmatrix} \frac{4m\beta^2(t-t_0)}{\|\vec{v}\|} \\ \frac{2m\beta\alpha}{\|\vec{v}\|} \end{pmatrix}$$

Les composantes normale et tangentielle de $\vec{P}$:

$$\vec{P} \begin{pmatrix} \frac{-2m\beta(t-t_0)}{\|\vec{v}\|} \\ -\frac{mg\alpha}{\|\vec{v}\|} \end{pmatrix}$$

9. Les expressions du module des forces $\vec{E} = E\vec{e}_t$ et $\vec{N} = N\vec{e}_n$ sont données par :

$$\begin{cases} E = \frac{2\beta(t-t_0)}{\|\vec{v}\|}(2m\beta + mg) \\ N = \frac{\alpha}{\|\vec{v}\|}(2m\beta + mg) \end{cases}$$

Comme $E > 0$, seule E peut s'annuler. Ceci se produit à t=t_0 (au point G_1).

Exercice 9

Soit $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. Considérons un point matériel M qui décrit dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un mouvement suivant la trajectoire de la figure 1. L'équation de cette trajectoire est donnée en coordonnées polaires par :

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1 + cos\varphi)$$

où ρ_0 est une longueur donnée, $0 \leq \varphi \leq \pi$ et $\dot{\varphi} > 0$.

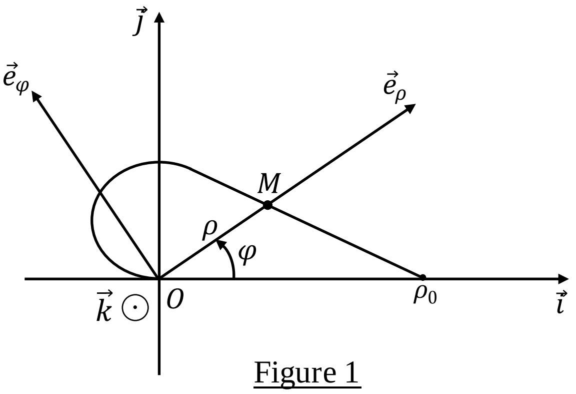


Figure 1

1) Démontrer que la vitesse de M dans $\Re$ peut s'écrire dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ sous la forme :

$$\vec{V}(M/\Re) = \rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

2) a) Déterminer $\|\vec{V}(M/\Re)\|$ le module du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\Re)$.

3) En déduire $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire.

4) a) Montrer que l'angle $(\widehat{\vec{e}_\varphi, \vec{\tau}}) = \varphi/2$.

b) Représenter graphiquement le vecteur $\vec{\tau}$.

5) Déterminer $\vec{\gamma}_t$ et $\vec{\gamma}_n$ respectivement les vecteurs accélérations tangentielle et normale.

6) En déduire ρ_c le rayon de courbure de la trajectoire ainsi que le vecteur unitaire $\vec{n}$.

7) a) Déterminer l'expression de l'abscisse curviligne s de M comptée à partir du point correspondant à $\varphi = 0$. On donne $s(\varphi = 0) = 0$.

b) En déduire la longueur totale de la trajectoire considérée.

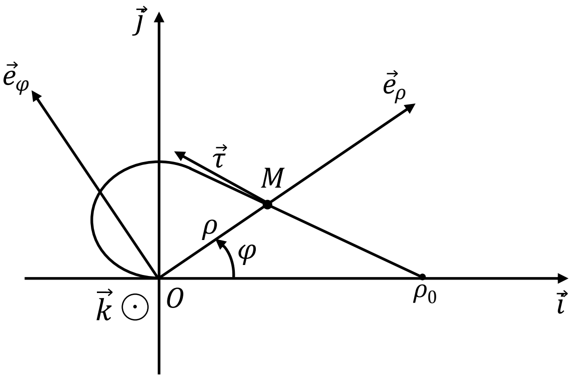
Corrigé :

Soit $\Re(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct. Considérons un point matériel M qui décrit dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un mouvement suivant la trajectoire de la figure 1. L'équation de cette trajectoire est

donnée en coordonnées polaires par :

$$\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1+cos\varphi)$$

où ρ_0 est une longueur donnée, $0 \leq \varphi \leq \pi$ et $\dot{\varphi} > 0$.



1) Démontrer que la vitesse de M dans $\Re$ peut s'écrire dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ sous la forme :

$$\vec{V}(M/\Re) = \rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

On a : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1+cos\varphi)\vec{e}_\rho$

$$\Longrightarrow \quad \vec{V}(M/\Re) = -\frac{1}{2}\rho_0\dot{\varphi}sin\varphi\;\vec{e}_\rho + \frac{1}{2}\rho_0\dot{\varphi}(1+cos\varphi)\;\vec{e}_\varphi$$

De même on a :

$$sin\varphi = sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) = 2sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$cos\varphi = cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) = 2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1 \quad \Longrightarrow \quad 1+cos\varphi = 2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{V}(M/\Re) = -\rho_0\dot{\varphi}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + \rho_0\dot{\varphi}cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi$$

D'où : $\vec{V}(M/\Re) = \rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$

2) a) Déterminer $\|\vec{V}(M/\Re)\|$ le module du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\Re)$

$$\begin{aligned}
\|\vec{V}(M/\Re)\| &= \left\|\rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]\right\| \\
&= \left|\rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|\left\|\left[-sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]\right\| \\
&= \rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)
\end{aligned}$$

3) En déduire $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire

On sait que : $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{V}(M/\Re)}{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|}$

Alors : $\vec{\tau} = -sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi$

4) a) Montrer que l'angle $(\widehat{\vec{e}_\varphi, \vec{\tau}}) = \varphi/2$.

On a : $\vec{\tau}.\vec{e}_\varphi = cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

Alors : $(\widehat{\vec{e}_\varphi, \vec{\tau}}) = \dfrac{\varphi}{2}$

b) Représenter graphiquement le vecteur $\vec{\tau}$.

Voir figure 1.

5) Déterminer $\vec{\gamma}_t$ et $\vec{\gamma}_n$ respectivement les vecteurs accélérations tangentielle et normale.

$$\vec{\gamma}_t = \gamma_t\vec{\tau} = \frac{d\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|}{dt}\vec{\tau} = \frac{d\left(\rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}{dt}\vec{\tau} = \left[\rho_0\ddot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2}\rho_0\dot{\varphi}^2 sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\vec{\tau}$$

$$\vec{\gamma}_n = \gamma_n\vec{n} = \left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{d}{dt}\left[-sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho + cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

$$= \rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-\frac{\dot{\varphi}}{2}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho - \dot{\varphi}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi - \frac{\dot{\varphi}}{2}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho\right]$$

$$= \rho_0\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-\frac{3}{2}\dot{\varphi}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho - \frac{3}{2}\dot{\varphi}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

$$= \frac{3}{2}\rho_0\dot{\varphi}^2cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[-cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho - sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$$

6) En déduire ρ_c le rayon de courbure de la trajectoire ainsi que le vecteur unitaire $\vec{n}$.

On sait que : $\gamma_n = \dfrac{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|^2}{\rho_c} = \dfrac{{\rho_0}^2\dot{\varphi}^2cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\rho_c}$

et comme : $\gamma_n = \|\vec{\gamma}_n\| = \dfrac{3}{2}\rho_0\dot{\varphi}^2cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

Alors : $\dfrac{\rho_0{}^2\dot{\varphi}^2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\rho_c} = \dfrac{3}{2}\rho_0\dot{\varphi}^2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \qquad \rho_c = \frac{2\rho_0\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{3}$$

Et comme : $\vec{\gamma}_n = \gamma_n\vec{n}$ alors $\vec{n} = \left[-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\rho - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\vec{e}_\varphi\right]$

7) a) Déterminer l'expression de l'abscisse curviligne s de M comptée à partir du point correspondant à $\varphi = 0$. On donne $s(\varphi = 0) = 0$.

On sait que : $\dfrac{ds}{dt} = \|\vec{V}(M/\Re)\| = \rho_0\dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

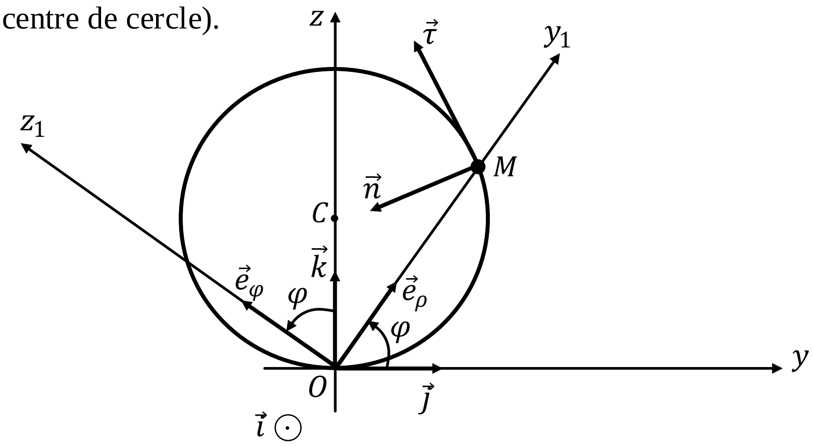
alors : $s = \int \rho_0\dot{\varphi}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)dt = 2\rho_0\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + c$

$$\Rightarrow \qquad s = 2\rho_0\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (c = 0 \text{ car } s(\varphi = 0) = 0)$$

b) En déduire la longueur totale de la trajectoire considérée. La longueur totale de la trajectoire correspond à $\varphi = \pi$ Et donc $l_{total} = s(\varphi = \pi) = 2\rho_0$.

Exercice 10

Soient $\Re(O, x, y, z)$ un référentiel absolu supposé galiléen muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\Re_1(O, x_1, y_1, z_1)$ un référentiel relatif muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{\imath})$. Au cours du temps, les axes (Ox) et (Ox_1) restent colinéaires. Dans le plan vertical (yOz), une tige circulaire de centre C et de rayon a est maintenue fixe. Un anneau M de masse m glisse sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré par $\overrightarrow{OM} = 2a\sin\varphi\,\vec{e}_\rho$ où $\varphi = (\widehat{\vec{\jmath}, \overrightarrow{OM}})$. On désigne par $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{\imath})$ la base de Frénet comme l'indique la figure ($\vec{n}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle).



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho , \vec{e}_\varphi , \vec{\imath})$.

1) Vérifier que la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{\imath}$.

2) a) Calculer $\vec{V}_r(M)$ et $\vec{V}_a(M)$ respectivement les vitesses relative et absolue de M.

b) En déduire $\vec{\tau}$ le vecteur tangent à la trajectoire.

c) Déterminer $\vec{n}$ le vecteur normal à la trajectoire.

3) Déterminer $\vec{\gamma}_r(M)$ l'accélération relative de M.

4) Déterminer $\vec{\gamma}_e(M)$ l'accélération d'entrainement de M.

5) Déterminer $\vec{\gamma}_c(M)$ l'accélération de Coriolis de M.

6) En déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de M.

Corrigé :

1. La vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par :

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{\imath}$$

2. a) Calcule des vitesses relative et absolue de M :

$$\vec{V}_r(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re_1} = 2a\dot{\varphi}cos\varphi\vec{e}_\rho$$

$$\vec{V}_a(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = 2a\dot{\varphi}(cos\varphi\vec{e}_\rho + sin\varphi\vec{e}_\varphi)$$

b) Le vecteur tangent à la trajectoire :

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M/\Re)}{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|} = (cos\varphi\vec{e}_\rho + sin\varphi\vec{e}_\varphi)$$

c) Le vecteur normal à la trajectoire :

$$\vec{n} = -sin\varphi\vec{e}_\rho + cos\varphi\vec{e}_\varphi$$

3. l'accélération relative de M :

$$\vec{\gamma}_r(M) = 2a(\ddot{\varphi}cos\varphi - \dot{\varphi}^2 sin\varphi)\vec{e}_\rho$$

4. L'accélération d'entrainement de M :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}\left(\frac{O_1}{\Re}\right) + \left.\frac{d\vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right)}{dt}\right|_{\Re} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right) \wedge \left(\vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$$
$$= 2a(\ddot{\varphi} sin\varphi \vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 sin\varphi \vec{e}_\rho)$$

5. L'accélération de Coriolis de M :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right) \wedge \vec{V}\left(\frac{M}{\Re_1}\right) = 4a\dot{\varphi}^2 cos\varphi \vec{e}_\varphi$$

6. l'accélération absolue de M :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \left.\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\right|_{\Re} = 2a(\ddot{\varphi} cos\varphi - 2\dot{\varphi}^2 sin\varphi)\vec{e}_\rho + 2a(\ddot{\varphi} sin\varphi + 2\dot{\varphi}^2 cos\varphi)\vec{e}_\varphi$$

La loi de composition des accélérations :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$
$$= 2a(\ddot{\varphi} cos\varphi - 2\dot{\varphi}^2 sin\varphi)\vec{e}_\rho + 2a(\ddot{\varphi} sin\varphi + 2\dot{\varphi}^2 cos\varphi)\vec{e}_\varphi$$

Exercice 11

Soient $\Re(O, xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\Re_1(O_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k})$ le référentiel relatif dont l'origine O_1 est en mouvement rectiligne sur l'axe (Oz). On donne $\overrightarrow{OO_1} = at\vec{k}$ où a est une constante positive et t le temps.

En plus, $\Re_1$ tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω_1 telle que $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \omega_1\vec{k}$ $(\omega_1 = \dot{\theta})$. Dans le plan horizontal $(O_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$, une tige (T) tourne autour de l'axe (O_1z) avec une vitesse angulaire constante ω_2, tel que $\varphi = \omega_2 t = (\widehat{\vec{u}_1, \vec{e}_\rho})$ où $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire porté par la tige (T).

Un point M est assujetti à se déplacer sur la Tige (T). Il est repéré dans le référentiel $\Re_1$ par : $\overrightarrow{O_1M} = \rho\vec{e}_\rho$ où $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est une base mobile dans $\Re_1$.

<u>N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base</u> $(\vec{e}_\rho\ , \ \vec{e}_\varphi\ , \vec{k})$.

I-Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement :

1) Déterminer $\vec{V}_r(M)$ la vitesse relative de M.

2) Déterminer $\vec{V}_e(M)$ la vitesse d'entrainement de M.

3) En déduire $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue de M.

4) Déterminer $\vec{\gamma}_r(M)$ l'accélération relative de M.

5) Déterminer $\vec{\gamma}_e(M)$ l'accélération d'entrainement de M.

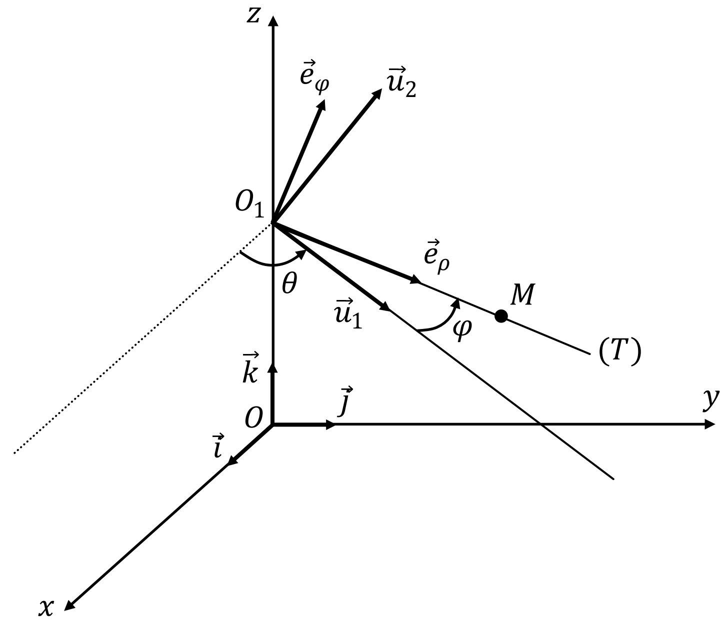
6) Déterminer $\vec{\gamma}_c(M)$ l'accélération de Coriolis de M.

7) En déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de M.

II-Etude de la cinématique de M par calcul direct :

8) Retrouver $\vec{V}_a(M)$ par calcul direct.

9) Retrouver $\vec{\gamma}_a(M)$ par calcul direct.



Corrigé :

I-Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement :

1. la vitesse relative de M :

$$\vec{V}_r(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{\Re_1} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega_2\vec{e}_\varphi$$

2. La vitesse d'entrainement de M :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O_1/\Re) + \vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \rho\omega_1\vec{e}_\varphi + a\vec{k}$$

3. La vitesse absolue de M :

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho(\omega_1 + \omega_2)\vec{e}_\varphi + a\vec{k}$$

4. l'accélération relative de M :

$$\vec{\gamma}_r(M) = (\ddot{\rho} - \rho\omega_2^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega_2\vec{e}_\varphi$$

5. L'accélération d'entrainement de M :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \overbrace{\vec{\gamma}(O_1/\Re)}^{\vec{0}} + \overbrace{\left.\frac{d\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)}{dt}\right|_{\Re}}^{\vec{0}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right) \wedge \left(\vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) = -\rho\omega_1^2\vec{e}_\rho$$

6. L'accélération de Coriolis de M:

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right) \wedge \vec{V}\left(\frac{M}{\Re_1}\right) = 2\omega_1(\dot{\rho}\vec{e}_\varphi - \rho\omega_2\vec{e}_\rho)$$

7. L'accélération absolue de M :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_{\mathrm{r}}(\mathrm{M}) + \vec{\gamma}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M}) + \vec{\gamma}_{\mathrm{c}}(\mathrm{M}) = (\ddot{\rho} - \rho(\omega_1 + \omega_2)^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}(\omega_1 + \omega_2)\vec{e}_\varphi$$

II-Etude de la cinématique de M par calcul direct :

8) $\vec{V}_a(M)$ par calcul direct :

$$\vec{V}_a(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re_1} + \vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right) \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho(\omega_1 + \omega_2)\vec{e}_\varphi + a\vec{k}$$

9) $\vec{\gamma}_a(M)$ par calcul direct :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \left.\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\vec{V}_a(M)}{dt}\right|_{\Re_1} + \vec{\Omega}\left(\frac{\Re_1}{\Re}\right) \wedge \vec{V}_a(M)$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho(\omega_1 + \omega_2)^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}(\omega_1 + \omega_2)\vec{e}_\varphi$$

Exercices complémentaires

Exercice 12

1) Donner l'expression du vecteur vitesse d'un point M en coordonnées polaires.

2) Montrer que l'accélération d'un point M en mouvement sur une trajectoire curviligne est donnée dans la base de Frénet par : $\vec{\gamma}(M/\Re) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho_c}\vec{n}$ où v est le module de la vitesse de M et ρ_c est le rayon de courbure de la trajectoire en M.

3) Soient $\Re$ et $\Re'$ deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. Si $\Re$ est galiléen, quelle condition doit vérifier $\Re'$ pour qu'il soit aussi galiléen ?

Exercice 13

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\Re(O, xyz)$ par ses coordonnée cylindriques (ρ, φ, z) telles que : $\rho = R$, $\varphi = \omega t$ et $z = h\varphi$ (R, ω et h sont des constantes positives et t le temps).

1) Ecrire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

2) a) Quelle est la nature du mouvement de M dans le plan (xOy) ?

b) Quelle est la nature du mouvement de M suivant la direction de l'axe (Oz) ?

c) Quelle est la nature du mouvement résultant de M ?

3) Déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération de M dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

4) Calculer l'abscisse curviligne $s(t)$ du point M sachant que $s(t = 0) = 0$.

5) Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération de M selon les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ du trièdre de Frénet.

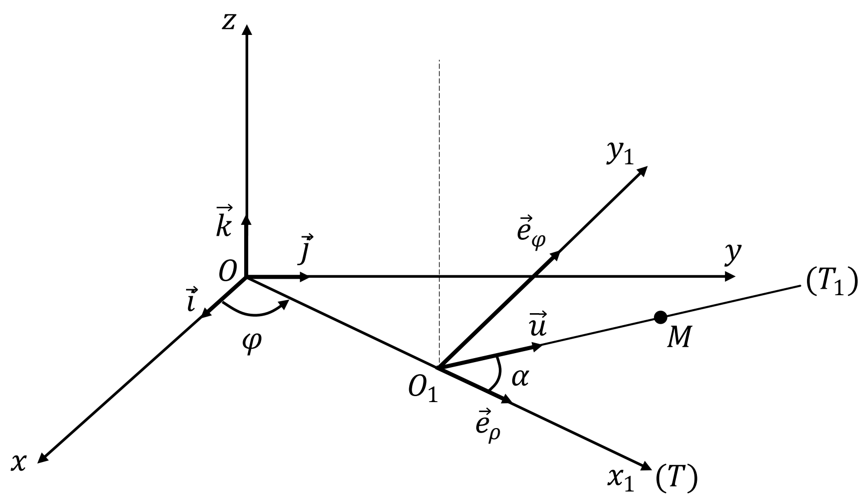
6) Calculer R_C le rayon de courbure de la trajectoire de M.

7) Déterminer les expressions des vecteurs unitaires $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{b}$.

Exercice 14

Soient $\Re(O, xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}})$ et $\Re_1(O_1, x_1y_1z_1)$ le référentiel relatif muni de la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$. Un point M est assujetti à se déplacer sur une Tige (T_1). La tige (T_1) est solidaire en O_1 avec une Tige (T) en rotation d'angle $\varphi(t)$ autour de l'axe (Oz) (voir figure). La tige (T_1) est située dans le plan vertical $(\vec{e}_\rho, \vec{k})$. Le point O_1 est repéré par :

$\overrightarrow{OO_1} = \rho(t)\vec{e}_\rho$ et le point M est repéré sur la tige (T_1) par : $\overrightarrow{O_1M} = V_0 t\,\vec{u}$ $(V_0 = cte)$. Le vecteur unitaire $\vec{u}$ fait un angle constant α avec le vecteur $\vec{e}_\rho$.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho\,,\ \vec{e}_\varphi\,,\vec{k})$.

I-Etude de la cinématique de M par calcul direct :

1) Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e}_\rho\,,\vec{k}$ et α.

2) Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

3) Déterminer $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ la vitesse de M dans le repère $\mathfrak{R}$.

4) Déterminer $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$ l'accélération de M dans le repère $\mathfrak{R}$.

II-Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement :

8) Vérifier que la vitesse de rotation de $\mathfrak{R}_1$ par rapport à $\mathfrak{R}$ est donnée par : $\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) = \dot{\varphi}\vec{k}$.

9) Déterminer $\vec{V}_r(M)$ la vitesse relative de M.

10) Déterminer $\vec{V}_e(M)$ la vitesse d'entrainement de M.

11) En déduire $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue de M.

12) Déterminer $\vec{\gamma}_r(M)$ l'accélération relative de M.

13) Déterminer $\vec{\gamma}_e(M)$ l'accélération d'entrainement de M.

14) Déterminer $\vec{\gamma}_c(M)$ l'accélération de Coriolis de M.

15) En déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de M.

Exercice 15

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\mathfrak{R}(O,xyz)$ par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) données par :

$$x = R(1 - coswt) \quad , \quad y = R(1 - sinwt) \quad , \quad z = 0$$

Où R et w sont des constantes positives et t le temps.

1) Donner l'équation de la trajectoire de M dans $\mathfrak{R}$.

2) En déduire la nature de cette trajectoire.

3) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$ du point M dans $\mathfrak{R}$.

Exercice 16

1) Un point matériel M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z), par ses coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) ou par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ).

Exprimer x, y et z en fonction des coordonnées cylindriques puis sphériques.

2) Soit M une particule de l'espace qui décrit un mouvement défini par :

$$\overrightarrow{OM} = 2t\vec{\imath} + 4t(t-1)\vec{\jmath}$$

a) Déterminer l'équation de la trajectoire de M. En déduire sa nature.

b) Calculer la vitesse de M à l'instant t.

c) Montrer que le mouvement a une accélération constante dont on déterminera les composantes tangentielle et normale.

3) On considère une courbe (C) sur laquelle se déplace un point matériel M d'abscisse curviligne $s(t)$. Soient $\mathfrak{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé direct et $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{b})$ la base de Frenet. On note par $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$ les vecteurs vitesse et accélération du point M dans $\mathfrak{R}$.

Exprimer R_c , le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M, en fonction de $\vec{V}(M/\mathfrak{R})$ et $\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})$.

Exercice 17

Un point matériel M est repéré dans un référentiel fixe $\mathfrak{R}(O,xyz)$ par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) données par :

$$x = Rcos\varphi \quad , \quad y = Rsin\varphi \quad , \quad z = h\varphi \qquad \text{(Avec } \varphi \geq 0)$$

Où R et h sont des constantes positives. On suppose aussi que le point M parcourt la courbe dans le sens des φ croissants, soit $\dot{\varphi}$ une constante positive.

1) Quelle est la nature de la trajectoire de M.

2) Représenter la projection de cette trajectoire dans le plan (xOy).

3) Exprimer $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\Re$ en fonction de R, h, φ et $\dot{\varphi}$:

a) Dans la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

b) Dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

4) Montrer que l'angle $\alpha = (\widehat{\vec{v}, \vec{k}})$ que fait le vecteur vitesse avec le vecteur $\vec{k}$ est constant.

5) Exprimer s l'abscisse curviligne de M en fonction de R, h et de φ sachant que $s(t = 0) = 0$.

6) Exprimer le rayon de courbure R_c de la trajectoire au point M en fonction de R et h.

7) Exprimer dans la base cartésienne les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ du repère de Frénet.

Exercice 18

Dans un référentiel $\Re$, un point M se déplace dans un plan avec une accélération donnée en fonction du temps par l'expression suivante :

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \alpha\vec{\tau} + \beta t^2 \vec{n}$$

Où $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ sont les vecteurs unitaires du trièdre de Frénet et α et β sont des constantes positives et t le temps. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la particule est au repos.

1) Donner les dimensions de α et β.

2) Déterminer $s(t)$ l'abscisse curviligne du point M sachant que $s(t = 0) = 0$.

3) Démontrer que l'expression du rayon de courbure de la trajectoire est donnée par $R_c = \frac{\alpha^2}{\beta}$.

Exercice 19

A l'instant t=0, une particule ponctuelle M est lancée du point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ située dans le plan (Oxz) et faisant avec l'horizontale un angle $\alpha > 0$ susceptible d'être ajusté (figure 1).

Le mouvement de ce point, étudié dans le référentiel terrestre $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est à vecteur accélération constant :

$\vec{a}(M/R) = \vec{a} = -g\overrightarrow{e_z}$ avec $g = \|\vec{g}\| > 0$.

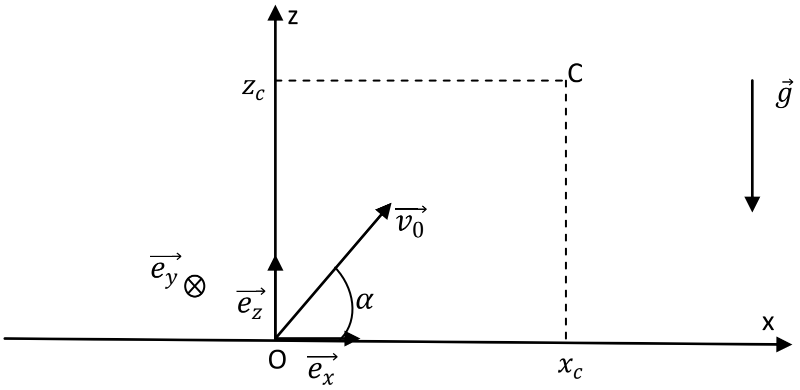


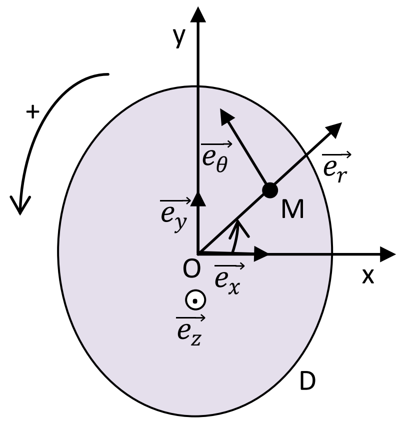
Figure 1

1- Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M/R)$ à l'instant t et les équations horaires du mouvement.
2- En déduire l'équation de la trajectoire de M et préciser la nature de celle-ci.
3- A quel instant t_s, le sommet S de cette trajectoire est-il atteint ? Quelles sont ses coordonnées x_s et z_s ?
4- Quelle est la portée OP du projectile, c'est-à-dire le point P où la trajectoire coupe l'axe (Ox). A quel instant t_p ce point est-il atteint ? quelles est la norme du vecteur vitesse en P ?
5- Montrer qu'il existe deux valeurs de α pour lesquelles ces trajectoires issues de l'origine O atteignent une même cible C dans le plan (Oxy).
6- Rechercher l'ensemble des points du plan (Oxy) accessibles au projectile lancé de O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ de norme constantes mais de direction quelconque. Vous déterminer pour cela l'équation de la parabole de sûreté séparant les points du plan pouvant etre atteints par le projectile de ceux qui ne le seront jamais.

Exercice 20

Un disque D de centre O tourne dans le plan (Oxy) à vitesse angulaire constante ω_0 autour de l'axe (Oz). Un mobile ponctuel M part de O à l'instant t=0 et est astrint à se déplacer à vitesse constante le long d'un rayon du disque :

$$\vec{v}(M/D) = \overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_r} \text{ avec } (v_0 > 0).$$



L'étude du mouvement guidé de M peut s'effectuer dans deux référentiels : le référentiel terrestre $R(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ ou le référentiel du disque $R(O,\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$.

1- Exprimer les coordonnées cartésiennes $x\ et\ y$ en fonction des coordonnées polaire $r\ et\ \theta$.

1- Considérons le mouvement de M par rapport au référentiel R. Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération du point M en fonction de $r\ et\ \theta$ et de leurs dérivées temporelles successives :
   a) dans la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$;
   b) dans la base cylindro-polaire $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$.
   Ces expressions sont-elles équivalentes ? Quelle est la base la mieux adaptée pour résoudre ce problème ?

2- Donner, en coordonnées polaires, les équations horaires de M : $r(t) et\ \theta(t)$. Vous les exprimeriez en fonction de $v_0,\omega_0\ et\ t$, en tenant compte du caractère guidé de M sur un rayon du disque à la vitesse $\overrightarrow{v_0}$.

3- En déduire l'équation et tracer l'allure de sa trajectoire dans le référentiel terrestre $R(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$. Montrer que r est incrémenté d'une longueur constante d à chaque tour du disque.

4- Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OM},\vec{v}(M/R)\ et\ \vec{a}(M/R)$ en coordonnées polaires dans la base $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$, en fonction de $v_0,\omega_0\ et\ t$.

5- Quelle est la trajectoire et l'accélération $\vec{a}(M/R)$ dans le référentiel du disque ?

Exercice 21

Dans le plan xOy un point M en mouvement est repéré par ses coordonnées polaires $r(t) et\ \theta(t)$.

1- Retrouver les expressions de sa vitesse $\vec{v}$ et de son accélération $\vec{a}$ et donner leurs composantes.

2- On suppose que $\vec{a}$ passe toujours par O (mouvement à accélération centrale). Montrer que la quantité $\vec{c}=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}$ est constante. En déduire que le mouvement obéit à la loi des aires, c'est-à-dire que l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ est proportionnelle au temps. Démontrer les formules de Binet :

$$v^2=c^2\left[(\frac{du}{d\theta})^2+u^2\right] \text{ et } a=-c^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right]$$

Où c est la constante des aires et $u=1\,/\,r$.

Chapitre

3&4

Dynamique du Point Matériel- Théorèmes généraux

Isaac Newton : (1642-1727)

Newton formule l'hypothèse audacieuse selon laquelle la Lune « tombe » sur la Terre de la même manière qu'un objet une pomme par exemple... tombe sur le sol. Mais en raison de sa vitesse initiale, la Lune décrit une trajectoire curviligne. Chute verticale et mouvement orbital sont donc des mouvements de même nature. Puis Newton étend cette hypothèse à tout corps céleste en orbite et aboutit à la loi suivante : « Deux corps quelconques s'attirent selon une force proportionnelle au produit de leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare ».

Objectifs :

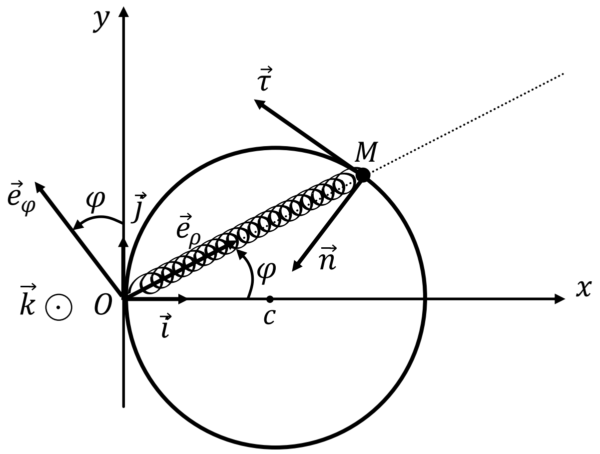
- Déterminer les caractéristiques de certaines forces ;
- Appliquer les trois lois de Newton ;
- Introduire la notion d'énergie et de puissance ;
- Appliquer les théorèmes généraux;
- Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour résoudre les problèmes à un degré de liberté ;
- Introduire le théorème du moment cinétique ;
- S'entrainer à la résolution des équations différentielles du mouvement ;
- Etudier les mouvements à axe centrale ;
- Comprendre et utiliser les lois de conservation ;
- Appliquer les théorèmes généraux ;

Pré-requis :

- Coordonnées polaires, coniques;
- Lecture de courbes et interprétation graphique de solutions ;
- Résolution des équations différentielles du mouvement ;

Exercice 1

Soient $\Re(O,xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $\Re_1(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ le référentiel relatif. Dans le plan horizontal (xOy), une tige circulaire de rayon a et de centre c est maintenue fixe. Un anneau M de masse m est assujetti à se déplacer sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré dans $\Re$ par : $\overrightarrow{OM} = 2a cos\varphi \vec{e}_\rho$ où $\varphi = (\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}})$ avec $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. L'anneau M est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longuer à vide a. L'autre extrémité du ressort est fixée au point O. En plus de la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort, l'anneau M est soumis à la réaction de la tige $\vec{R}$ et à son poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$. On désigne par $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{k})$ la base de Frénet comme l'indique la figure ($\vec{n}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle).



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho , \vec{e}_\varphi , \vec{k})$.

1) a) Calculer la vitesse de M par rapport à $\Re$.

b) En déduire le vecteur $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire.

c) Calculer le vecteur $\vec{n}$ normal à la trajectoire.

2) Donner les expressions des forces appliquées à M dans $\Re$.

3) a) Ecrire le PFD appliqué à M dans $\Re$.

b) En projetant le PFD sur $\vec{\tau}$, donner l'équation différentielle du mouvement de M dans $\Re$.

c) Que devient cette équation pour des faibles valeurs de φ.

d) En projetant le PFD sur $\vec{n}$ et $\vec{k}$, trouver les composantes de la réaction $\vec{R}$ du support sur M.

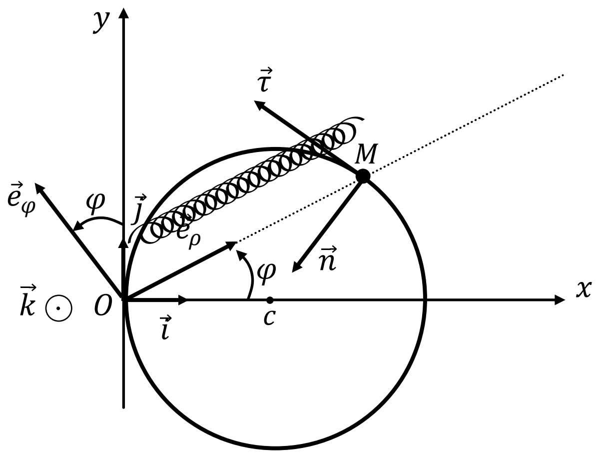
4) a) Calculer $\vec{\sigma}_c(M/\Re)$ le moment cinétique par rapport au point c de M dans $\Re$.

b) Calculer les moments dynamiques par rapport à c des forces appliquées à M dans $\Re$.

c) En appliquant le théorème du moment cinétique, retrouver l'équation différentielle du mouvement de M dans $\Re$.

Corrigé

Soient $\Re(O,xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $\Re_1(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$ le référentiel relatif. Dans le plan horizontal (xOy), une tige circulaire de rayon a et de centre c est maintenue fixe. Un anneau M de masse m est assujetti à se déplacer sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré dans $\Re$ par : $\overrightarrow{OM} = 2acos\varphi\,\vec{e}_\rho$ où $\varphi = (\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OM}})$ avec $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. L'anneau M est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longuer à vide a. L'autre extrémité du ressort est fixée au point O. En plus de la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort, l'anneau M est soumis à la réaction de la tige $\vec{R}$ et à son poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$. On désigne par $(\vec{\tau},\vec{n},\vec{k})$ la base de Frénet comme l'indique la figure ($\vec{n}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle).



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho\ ,\ \vec{e}_\varphi\ ,\vec{k})$.

1) Calculer $\vec{V}(M/\Re)$ la vitesse de M par rapport à $\Re$.

$$\vec{V}(M/\Re) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d}{dt}\big(2acos\varphi\,\vec{e}_\rho\big)\right|_{\Re} = 2a\dot{\varphi}\big(-sin\varphi\vec{e}_\rho + cos\varphi\ \vec{e}_\varphi\big)$$

2) En déduire les expressions des vecteurs tangent $\vec{\tau}$ et normal $\vec{n}$ à la trajectoire au point M.

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M/\Re)}{\left\|\vec{V}(M/\Re)\right\|} = \big(-sin\varphi\vec{e}_\rho + cos\varphi\ \vec{e}_\varphi\big)$$

$$\vec{n} = \vec{k}\wedge\vec{\tau} = \vec{k}\wedge\big(-sin\varphi\vec{e}_\rho + cos\varphi\ \vec{e}_\varphi\big) = -sin\varphi\ \vec{e}_\varphi\ - cos\varphi\vec{e}_\rho$$

3) Déterminer $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re)$ la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$.

$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{k}$

4) Déterminer les accélérations relative $\vec{\gamma}_r(M)$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$ de M.

$$\vec{\gamma}_r(M) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\Re_1} = \left.\frac{d^2}{dt^2}\left(2acos\varphi\vec{e}_\rho\right)\right|_{\Re_1} = -2a(\ddot{\varphi}sin\varphi + \dot{\varphi}^2cos\varphi)\vec{e}_\rho$$

$$\vec{\gamma}_e(M) = \ddot{\varphi}\vec{k} \wedge 2acos\varphi\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\vec{k} \wedge (\dot{\varphi}\vec{k} \wedge 2acos\varphi\vec{e}_\rho) = 2a\ddot{\varphi}cos\varphi\ \vec{e}_\varphi - 2a\dot{\varphi}^2cos\varphi\vec{e}_\rho$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\dot{\varphi}\vec{k} \wedge \vec{V}_r(M) = 2\dot{\varphi}\vec{k} \wedge 2a(-\dot{\varphi}sin\varphi)\vec{e}_\rho = -4a\dot{\varphi}^2sin\varphi\ \vec{e}_\varphi$$

5) Donner les expressions des forces appliquées à M dans $\Re_1$.

$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

$$\vec{R} = R_n\vec{n} + R_k\vec{k}$$

$$\vec{F} = -k(\rho - a)\vec{e}_\rho = -ka(2cos\varphi - 1)\vec{e}_\rho$$

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{\gamma}_e(M) = -2am(\ddot{\varphi}cos\varphi\ \vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2cos\varphi\vec{e}_\rho)$$

$$\vec{f}_{ic} = -m\vec{\gamma}_c(M) = -4am\dot{\varphi}^2sin\varphi\ \vec{e}_\varphi$$

6) Ecrire le PFD appliqué à M dans $\Re_1$.

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{\gamma}_r(M)$$

7) a) En projetant le PFD sur $\vec{\tau}$, donner l'équation différentielle du mouvement de M.

Tout calcul fait conduit à :

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{2m}(1 - 2cos\varphi)sin\varphi = 0$$

b) Que devient cette équation pour des faibles valeurs de φ.

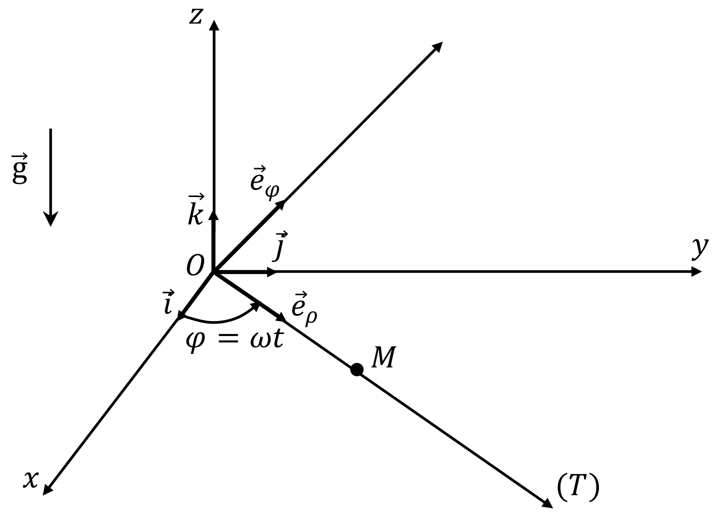
$$\ddot{\varphi} - \frac{k}{2m}\varphi = 0 \qquad (sin\varphi \cong \varphi \quad \text{et} \quad cos\varphi \cong 1)$$

8) En projetant le PFD sur $\vec{n}$ et $\vec{k}$, trouver les composantes de la réaction $\vec{R}$ du support sur M.

Tout calcul fait donne : $R_k = mg$ et $R_n = -ka(2cos\varphi - 1)cos\varphi + 4am\dot{\varphi}^2$

Exercice 2

Soit $\Re(O,xyz)$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m. Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xoy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω ($\varphi = \omega t$ et $\omega > 0$). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F} = F\vec{e}_\rho$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overrightarrow{OM} = at\vec{e}_\rho$ (t étant le temps et a une constante positive). $(\vec{e}_\rho\ ,\ \vec{e}_\varphi\ ,\vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho\ ,\ \vec{e}_\varphi\ ,\vec{k})$.

1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$ de M dans $\Re$ en fonction de a, t et ω.

2) Déterminer $\vec{\sigma}_O(M/\Re)$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

3) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M.

4) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de $\vec{R}$.

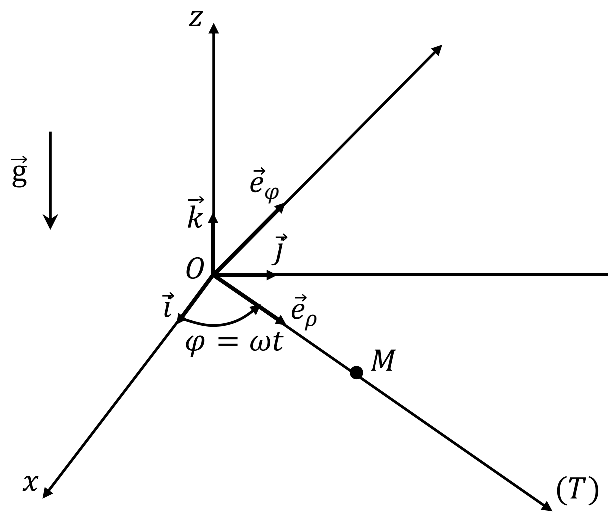
5) Déterminer $E_c(M/\Re)$ l'énergie cinétique du point M dans $\Re$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

6) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

7) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $\vec{F}$.

Corrigé

Soit $\Re(O,xyz)$ un référentiel orthonormé direct et Galiléen, muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit M un point matériel de masse m. Le point M glisse sans frottement le long de la tige (T) qui tourne dans le plan horizontal (xoy) autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω ($\varphi = \omega t$ et $\omega > 0$). M est soumis, en plus de son poids $\vec{P}$ et de la réaction de la tige $\vec{R}$, à une force $\vec{F} = F\vec{e}_\rho$. Dans ces conditions, le mouvement de M le long de la tige suit la loi $\overrightarrow{OM} = at\vec{e}_\rho$ (t étant le temps et a une constante positive). $(\vec{e}_\rho\,,\,\vec{e}_\varphi\,,\vec{k})$ est la base cylindrique liée à la tige.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho\,,\,\vec{e}_\varphi\,,\vec{k})$.

1) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/\Re)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/\Re)$ de M dans $\Re$ en fonction de a, t et ω.

$$\vec{V}(M/\Re) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(M/\Re) = \left.\frac{d\vec{V}(M/\Re)}{dt}\right|_{\Re} = -at\omega^2\vec{e}_\rho + 2a\omega\vec{e}_\varphi$$

Déterminer $\vec{\sigma}_o(M/\Re)$ le moment cinétique en O du point M ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

$\vec{\sigma}_o(M/\Re) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re) = at\vec{e}_\rho \wedge m\left(a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi\right) = ma^2t^2\omega\,\vec{k}$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\Re)}{dt}\right|_\Re = 2ma^2t\omega\,\vec{k}$$

2) Déterminer les moments dynamiques de chacune des forces agissant sur le point M.

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = at\vec{e}_\rho \wedge F\vec{e}_\rho = \vec{0}$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = at\vec{e}_\rho \wedge -mg\vec{k} = atmg\,\vec{e}_\varphi$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} = at\vec{e}_\rho \wedge \left(R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_k\vec{k}\right) = atR_\varphi\vec{k} - atR_k\vec{e}_\varphi = at\left(-R_k\vec{e}_\varphi + R_\varphi\vec{k}\right)$

3) En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver les expressions des composantes de $\vec{R}$.

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_o(M/\Re)}{dt}\right|_\Re = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R})$$

$\Longrightarrow \quad 2ma^2t\omega\,\vec{k} = at(mg - R_k)\vec{e}_\varphi + atR_\varphi\vec{k}$

$\Longrightarrow \quad R_\varphi = 2ma\omega \qquad$ et $\qquad R_k = mg$

4) Déterminer $E_c(M/\Re)$ l'énergie cinétique du point M dans $\Re$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps dans $\Re$.

$$E_c(M/\Re) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/\Re) = \frac{1}{2}m(a^2 + a^2t^2\omega^2)$$

$$\left.\frac{dE_c(M/\Re)}{dt}\right|_\Re = ma^2\omega^2t$$

5) Déterminer les puissances de chacune des forces agissant sur le point M.

$\vec{\mathcal{P}}(\vec{F}/\Re) = \vec{F}.\vec{V}(M/\Re) = F\vec{e}_\rho.\left(a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi\right) = Fa$

$\vec{\mathcal{P}}(\vec{P}/\Re) = \vec{P}.\vec{V}(M/\Re) = -mg\vec{k}.\left(a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi\right) = 0$

$\vec{\mathcal{P}}(\vec{R}/\Re) = \vec{R}.\vec{V}(M/\Re) = \left(R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_k\vec{k}\right).\left(a\vec{e}_\rho + at\omega\vec{e}_\varphi\right) = R_\varphi at\omega = 2ma^2\omega^2t$

6) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, trouver l'expression de $\vec{F}$.

$$\left.\frac{dE_c(M/\Re)}{dt}\right|_\Re = \vec{\mathcal{P}}(\vec{F}/\Re) + \vec{\mathcal{P}}(\vec{P}/\Re) + \vec{\mathcal{P}}(\vec{R}/\Re)$$

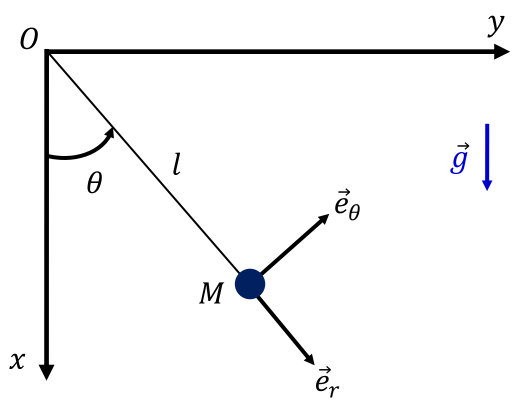
$\Longrightarrow \quad ma^2\omega^2t = Fa + 2ma^2\omega^2t$

$\Longrightarrow \quad F = -ma\omega^2t$

$\Longrightarrow \qquad \vec{F} = -ma\omega^2 t\,\vec{e}_\rho$

Exercice 3

On considère un pendule simple constitué d'un objet ponctuel M de masse m, accroché à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (xOy) du référentiel fixe $\Re(O, xyz)$.
On écarte le pendule d'un angle θ de sa position d'équilibre ($\theta = 0$) et on le lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes.
L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre g considéré comme uniforme.



1) Exprimer les forces appliquées au point M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

2) Calculer $\vec{V}(M/\Re)$ et $\vec{\gamma}(M/\Re)$ respectivement les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\Re$.

3) En appliquant le PFD dans le référentiel galiléen $\Re$:

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le cas de faibles oscillations.

b) Résoudre cette équation différentielle.

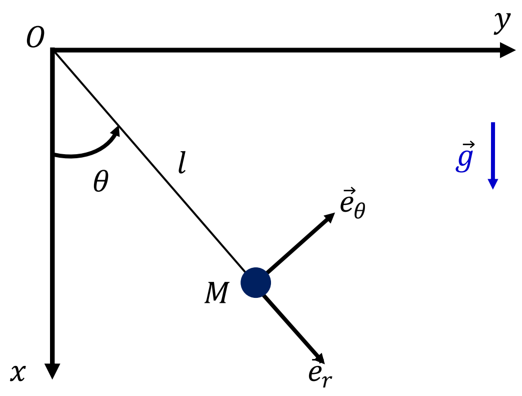
4) Etablir l'expression de la tension T du fil.

5) Retrouver l'équation différentielle du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Corrigé

On considère un pendule simple constitué d'un objet ponctuel M de masse m, accroché à un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable. Son mouvement a lieu dans le plan vertical (xOy) du référentiel fixe $\Re(O, xyz)$.

On écarte le pendule d'un angle θ de sa position d'équilibre ($\theta = 0$) et on le lâche sans vitesse initiale. Les forces de frottement sont supposées inexistantes. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre g considéré comme uniforme.



1) Citer les forces s'appliquant sur le point matériel M dans le référentiel galiléen $\Re$.

Les forces appliquées au point M sont :

- Son poids $\vec{P}$ avec : $\vec{P} = m\vec{g} = mgcos\theta\,\vec{e}_r - mgsin\theta\,\vec{e}_\theta$
- La tension du fil $\vec{T}$ avec : $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

2) Ecrire le PFD appliqué au point M dans $\Re$.

Le PFD dans ce référentiel galiléen est le suivant:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}(M/\Re)$$

$$\Longrightarrow \quad m\vec{\gamma}(M/\Re) = \vec{P} + \vec{T}$$

$$\Longrightarrow \quad -ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r + ml\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = (mgcos\theta - T)\vec{e}_r - mgsin\theta\,\vec{e}_\theta$$

3) a) En projetant le PFD sur $\vec{e}_\theta$, établir l'équation du mouvement pour de faibles oscillations.

La projection du PFD sur $\vec{e}_\theta$ donne :

$$ml\ddot{\theta} = -mgsin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad ml\ddot{\theta} + mgsin\theta = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

Pour des faibles oscillations, $sin\theta \cong \theta \quad (\theta\ trés\ petit)$

On trouve finalement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

b) En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 du mouvement.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

4) En projetant le PFD sur $\vec{e}_r$, établir l'expression de la tension T du fil.

La projection du PFD sur $\vec{e}_r$ donne :

$$-ml\dot{\theta}^2 = mgcos\theta - T$$

$\Longrightarrow \quad T = mgcos\theta + ml\dot{\theta}^2$

5) Retrouver l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.

Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt}\right|_{\Re} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P} + \vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}$$

Avec :

- $\vec{\sigma}_O(M/\Re) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/\Re) = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta = ml^2\dot{\theta}\vec{k}$

  $\Longrightarrow \quad \left.\frac{d\vec{\sigma}_O(M/\Re)}{dt}\right|_{\Re} = ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$

- $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l\vec{e}_r \wedge (mgcos\theta\,\vec{e}_r - mgsin\theta\,\vec{e}_\theta) = -mglsin\theta\vec{k}$
- $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$

  Ce qui implique que : $\quad ml^2\ddot{\theta}\vec{k} = -mglsin\theta\vec{k}$

$$\Longrightarrow \quad ml^2\ddot{\theta} = -mglsin\theta$$

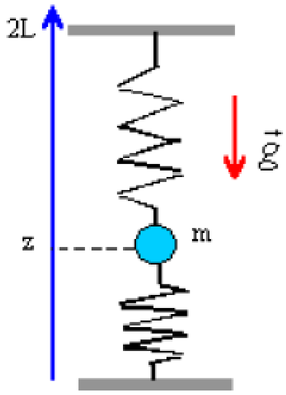
On obtient finalement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

Exercice 4

Un solide de masse m est fixée à 2 ressorts verticaux de raideur k et de l_o est astreint à des déplacements suivant la verticale. La position du centre de gravité du solide est repérée par la cote z. Dans un premier temps on néglige les frottements.
1. Exprimer les énergies potentielles en fonction de z. Préciser les origines choisies.
2. Etablir l'équation différentielle avec la variable z.
- A l'instant initial on lâche le mobile à partir de la position z=½ l_o

- La période du mouvement est elle modifiée si on part de 0,25 l0 ?
3. Exprimer les forces s'exerçant sur le mobile en fonction de z; retrouver la condition d'équilibre.
- Etablir l'équation différentielle vérifiée par z.
4. On tient compte des frottements en plaçant le dispositif dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité η, qui exerce une force de freinage du type $F = -6\pi\eta r v$. Comment est modifiée l'équation différentielle ? La position d'équilibre est elle changée ?
5. La période des oscillations dans l'air est T_0 et la pseudo-période dans un liquide est T. Etablir l'expression de la viscosité du liquide en fonction de T_0, T et des caractéristiques de la sphère.



Corrigé

1. Les énergies potentielles en fonction de z :

$$\begin{cases} \text{Énergie potentielle de pesanteur : (origine } z = 0) \; mgz. \\ \text{Énergie potentielle élastique, ressort ressort inférieur : } \tfrac{1}{2}k(z - l_0)^2 \\ \text{ressort supérieur : } \tfrac{1}{2}k(2L - z - l_0)^2 \end{cases}$$

Donc l'énergie potentielle total est donné par :

$$E_P = mgz + \tfrac{1}{2}k(z - l_0)^2 + \tfrac{1}{2}k(2L - z - l_0)^2$$

2. L'équation différentielle est donnée par :

$$\ddot{z} + \frac{2k}{m} z = \frac{2kL}{m} - g$$

La solution de cette équation est : $z(t) = \left(-\frac{1}{2}L + \frac{mg}{2k}\right)\cos(\omega t) + L - \frac{mg}{2k}$

3. Inventaire des forces :

$$\begin{cases} \vec{T}_1 = -k(z - l_0)\vec{z}\text{: tension exercée par le ressort inférieur} \\ \vec{T}_2 = k(2L - z - l_0)\vec{z}\text{: tension exercée par le ressort du haut} \\ \vec{P} = -mg\vec{z}\text{: poid} \end{cases}$$

4. Les frottements fluides ne modifient pas la position d'équilibre, contrairement aux frottements solides.

5. La période devient : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

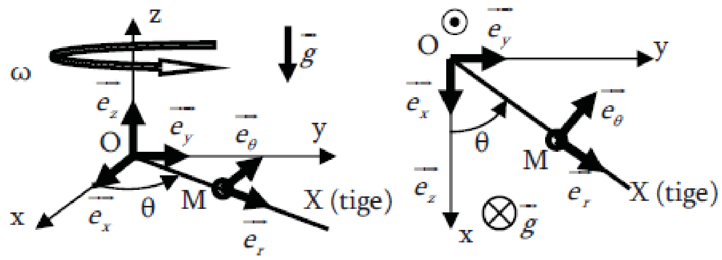
Exercice 5

Une tige rectiligne horizontale (OX) tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$ en restant dans le plan (Oxy). Un anneau M de masse m est enfilé sur cette tige et peut glisser sans frottement. On utilise les coordonnées polaires (r(t),θ(t)) pour décrire le mouvement de M. A l'instant t = 0, l'anneau démarre sans vitesse initiale par rapport à la tige du point M0 repéré par les coordonnées polaires :

$\theta(0) = 0$ et r(0) = r_0.

La résistance au mouvement de l'air est négligeable et le champ de pesanteur uniforme :

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z$$



1. Effectuer le bilan des forces appliquées au point M par le milieu extérieur.
2. Ecrire le PFD dans le référentiel terrestre, projeté dans la base cylindrique.
3. En déduire l'équation de 2nd ordre vérifiée par r(t).
4. Etablir les équations horaires r(t). En déduire l'équation et l'allure de la trajectoire.
5. Déterminer la réaction de la tige sur l'anneau en fonction de t.
6. L'anneau est maintenant soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de masse raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide r_0. Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en O et l'autre est attachée au point mobile M. Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige et discuter de la nature de celui-ci. Les conditions initiales sont inchangées.

Corrigé

1. Le Référentiel d'étude terrestre : $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ supposé galiléen.

La base de projection : cylindrique $B_{cyl} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

Bilan des forces : $\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} \\ \vec{R} = R_N\vec{e}_z \end{cases}$

2. Appliquons le PFD dans $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$m\vec{a}\left({}^{M}/_{R}\right) = \vec{P} + \vec{R}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 0 = m(\ddot{r} - r\omega^2) \\ R_{N\theta} = 2m\dot{r}\omega \\ R_{Nt} = mg \end{cases}$$

3. Equation est : $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$

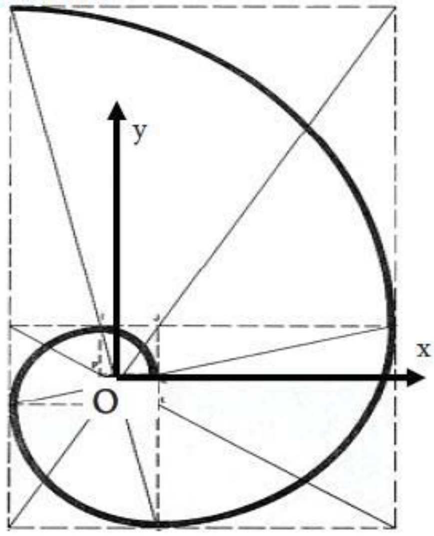
4. On en déduit l'expression de r(t) et $\theta(t)$:

$$\begin{cases} r(t) = r_0\cosh(\omega t) \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

5. Réaction de la tige : $\begin{cases} R_{N\theta} = 2mr_0\omega^2\sinh(\omega t) \\ R_{Nt} = mg \end{cases}$

Plus le point s'éloigne et plus la tige doit fournir d'effort pour maintenir la rotation.

Allure de la courbe :



6. On rajoute un ressort dans le PFD :

$$\begin{cases} -k(r - r_0) = m(\ddot{r} - r\omega^2) \\ R_{N\theta} = 2m\dot{r}\omega \\ R_{Nt} = mg \end{cases}$$

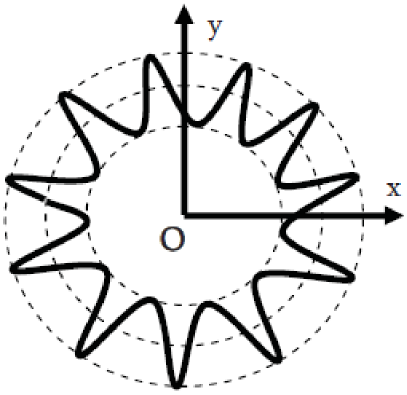
Ce qui nous donne la nouvelle équation différentielle :

$$\ddot{r} - r\omega^2 + \frac{k}{m}(r - r_0) = 0$$

Résolution : on voit 2 cas apparaître

Cas 1 : si $\omega^2 < \frac{k}{m}$, alors le ressort ramène le point autour de la position en r = r_0. On a des ondulations autour de cette position :

$$r(t) = \frac{k}{k - m\omega^2}r_0 + \text{A}\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$



Cas 1 : si $\omega^2 > \frac{k}{m}$, alors le ressort ne suffit pas à ramener le point autour d'une quelconque position d'équilibre, la solution reste en cosinus hyperbolique, et elle diverge de la même manière.

Exercice 6

Une fusée contient un mélange combustible qui est éjecté avec une vitesse relative u par rapport à la tuyère. On suppose que le combustible s'échappe verticalement vers le bas de la tuyère. On néglige les frottments de l'air et la variation de la pesanteur avec l'altitude (i.e. on prend g constant). La masse du combustible est m, et la masse totale du reste de la fusée (réservoirs, accessoires, etc...) est M.

1) Montrer que la fuséee ne peut d´ecoller que si le débit de gaz brulés (i.e. la variation de masse de combustible par unité de temps) est supérieur à une limite à indiquer.

2) On suppose que la masse de combustible évolue suivant la loi :

$$m = m_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } 0 < t < \tau$$

Déterminer la valeur maximale de τ qui permet le décollage.

c) Déterminer l'expression de la vitesse v (t) avec 0 < t < τ .

Corrigé

1. La 2eme loi de Newton appliquée à la fusée, qui est un système de masse M +m variable avec une vitesse d'éjection $\vec{u}$, est donnée par,

$$(m+M)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{d(m+M)}{dt}\vec{u}$$

où la masse M de la fusée à vide est constante (i.e. dM=dt = 0) et le débit de gaz brûlées est négatif (i.e. dm=dt < 0) puisque la fusée perd du combustible. La seule force extérieure qui agit sur le système est le poids de la fusée et de son combustible, i.e.

$$\vec{F} + (m+M)\vec{g}$$

Par conséquent, l'accélération de la fusée est de la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{1}{m+M}\frac{dm}{dt}\vec{u}$$

Le mouvement de la fusée a lieu selon l'axe vertical z de ni par le vecteur orthonormé $\vec{e}_z$ dirigé vers le haut. On projète d'abord les vecteurs selon l'axe vertical, i.e.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_z, \quad \vec{g} = g\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{u} = -u\vec{e}_z$$

puis l'équation du mouvement, i.e.

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{1}{m+M}\frac{dm}{dt}$$

La condition de décollage est une accélération positive de la fusée vers le haut (i.e. dv=dt > 0). Cette condition se traduit dans l'équation du mouvement (26) par,

$$\left|\frac{dm}{dt}\right| = -\frac{dm}{dt} > \frac{m+M}{u}g$$

Par conséquent, si le débit de gaz brules par la fusée lors de son lancement est supérieur la fusée décolle !

2. La masse de combustible suit la loi d'évolution,

$$m = m_0(1 - \frac{t}{\tau})$$

Ainsi, la dérivée temporelle de cette relation vaut,

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_0}{\tau}$$

La condition de décollage, celle-ci se réduit à :

$$\frac{m_0}{\tau} > \frac{m+M}{u}g \Rightarrow \tau < \frac{u}{g}\frac{m_0}{M+m_0}$$

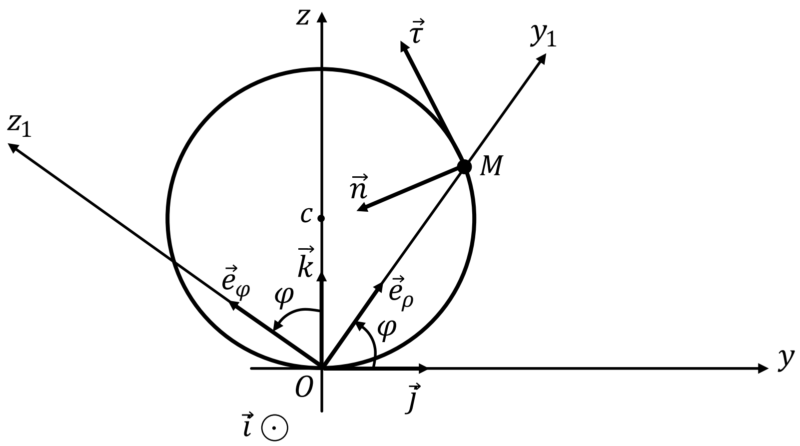
3. L'expression de la vitesse v (t) avec 0 < t < τ, est donnée par :

$$v(t) = -gt - uln(1 - \left(\frac{m_0}{M+m_0}\right)\frac{t}{\tau})$$

Exercice 7

Soient $\Re(O, x, y, z)$ un référentiel absolu supposé galiléen muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $\Re_1(O, x_1, y_1, z_1)$ un référentiel relatif muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{\imath})$. A cours du temps, les axes (Ox) et (Ox_1) restent colinéaires. Dans le plan vertical

(yOz), une tige circulaire de centre c et de rayon a est maintenue fixe. Un anneau M de masse m glisse sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré par $\overrightarrow{OM} = 2a sin\varphi \vec{e}_\rho$ où $\varphi = (\widehat{\vec{j}, \overrightarrow{OM}})$. On désigne par $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{\imath})$ la base de Frénet comme l'indique la figure ($\vec{n}$ est le vecteur dirigé vers le centre de cercle). L'accélération de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g\vec{k}$.



1) Vérifier que la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par $\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{\imath}$.

2) Calculer $\vec{V}_r(M)$ et $\vec{V}_e(M)$ respectivement les vitesses relative et d'entrainement de M.

3) En déduire que la vitesse absolue de M est donnée par : $\vec{V}_a(M) = 2a\dot{\varphi}(cos\varphi\vec{e}_\rho + sin\varphi\vec{e}_\varphi)$.

4) Donner les expressions des vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.

5) Donner les expressions des forces appliquées à l'anneau M dans $\Re$.

6) a) Calculer $\vec{\sigma}_c(M/\Re)$ le moment cinétique par rapport au point c de M dans $\Re$.

b) Calculer les moments dynamiques par rapport à c des forces appliquées à M dans $\Re$.

c) En appliquant le théorème du moment cinétique, Montrer que l'équation différentielle du mouvement de M peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{2a} sin(2\varphi) = 0$$

Corrigé :

1. La vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par :

$$\vec{\Omega}(\Re_1/\Re) = \dot{\varphi}\vec{\imath}$$

2. a) Calcule des vitesses relative et absolue de M :

$$\vec{V}_r(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re_1} = 2a\dot{\varphi}cos\varphi\vec{e}_\rho$$

$$\vec{V}_a(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = 2a\dot{\varphi}(cos\varphi\vec{e}_\rho + sin\varphi\vec{e}_\varphi)$$

b) Le vecteur tangent à la trajectoire :

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M/\Re)}{\|\vec{V}(M/\Re)\|} = (cos\varphi\vec{e}_\rho + sin\varphi\vec{e}_\varphi)$$

3. Vitesse absolue de M :

$$\vec{V}_a(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\Re} = 2a\dot{\varphi}(cos\varphi\vec{e}_\rho + sin\varphi\vec{e}_\varphi)$$

4. Le vecteur normal à la trajectoire :

$$\vec{n} = -sin\varphi\vec{e}_\rho + cos\varphi\vec{e}_\varphi$$

5. les expressions des forces appliquées à l'anneau M dans $\Re$:

$$\vec{P} = -mg(sin\varphi\vec{e}_\rho + cos\varphi\vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{R} = R(-sin\varphi\vec{e}_\rho + cos\varphi\vec{e}_\varphi)$$

6. a) le moment cinétique par rapport au point c de M dans $\Re$:

$$\vec{\sigma}_c\left(\frac{M}{\Re}\right) = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}\left(\frac{M}{\Re}\right) = 2aR\dot{\varphi}\vec{i}$$

b) les moments dynamiques par rapport à c des forces appliquées à M dans $\Re$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\vec{P}/\Re) = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{P} = -2mgRcos\varphi sin\varphi\,\vec{i}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\vec{R}/\Re) = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

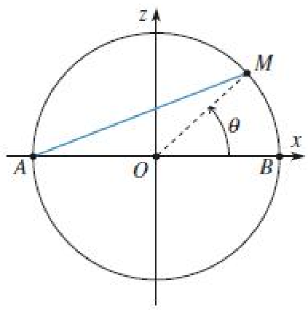
c) Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_c\left(\frac{M}{\Re}\right)}{dt} = \overrightarrow{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\vec{P}/\Re) + \overrightarrow{\boldsymbol{\mathcal{M}}}(\vec{R}/\Re) \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{2a}sin(2\varphi) = 0$$

Exercice 8

Un point M de masse m est lié à un cercle fixe dans le plan vertical, de centre O et de rayon R. La liaison est supposée sans frottements. Le point M est attiré par l'extrémité A du diamètre horizontal AB par une force toujours dirigée vers A et dont le module est proportionnel à la distance AM. La position du point M est repérée par l'angle q = (AB, OM).

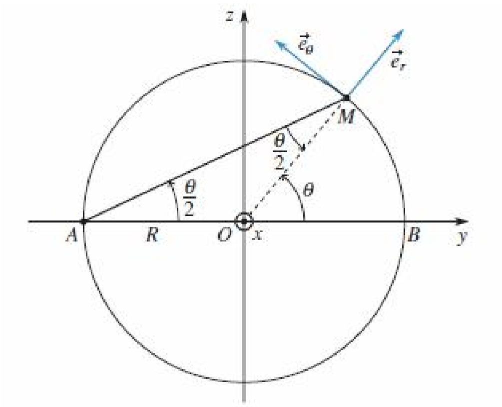
1. Déterminer les positions $q = q_e$ d'équilibre du point M sur le cercle.
2. Quand le point n'est pas en équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par q en utilisant la relation fondamentale de la dynamique, puis le théorème du moment cinétique en O .
3. On suppose que q reste proche de q_e et on pose $q = q_e + u$ avec $u << q_e$. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par u. Les conditions initiales sont $u = u_0$ et $\dot{u}=0$. Déterminer entièrement $u(t)$. Que peut-on dire quant à la stabilité de la (des) position(s) d'équilibre déterminée(s) au 1)? Une position d'équilibre est stable si, quand on écarte légèrement le point de cette position, il tend à y revenir, elle est instable dans le cas contraire.



Corrigé :

1. Les forces appliquées au point M sont :

$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg(sin\theta\,\vec{e}_r + cos\theta\,\vec{e}_\theta): poids \\ \vec{N} = N\vec{e}_r : réaction\ du\ cercle \\ \vec{F} = -2kRcos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta\right): force\ de\ rappel \end{cases}$$



Quand le point M est à l'équilibre, $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}$,

La force $\vec{N}$ étant inconnue, on projette cette équation sur $\vec{e}_\theta$:

$$tan\theta = \frac{mg}{kR}$$

Il y a donc deux positions d'équilibre :

$$\begin{cases} \theta_1 = arc\tan(\frac{mg}{kR}) \\ \theta_2 = \pi + \theta_1 \end{cases}$$

2. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}$$

On projette sur $\vec{e}_\theta$ pour éliminer N :

$$mR\ddot{\theta} = -mgcos\theta + 2kRsin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} == -mgcos\theta + kRsin\theta$$

3. $\theta_e = \theta_1$ou θ_2

L'équation du mouvement devient, au premier ordre en u :

$$\ddot{u} - \left(\frac{k}{m}cos\theta_e + \frac{g}{R}sin\theta_e\right)u = 0$$

Pour $\theta_e = \theta_1$, compte tenu des conditions initiales, la solution de l'équation du mouvement est donnée par :

$$u(t) = u_0 ch(\omega t) \text{ avec } \omega_1 = \frac{k}{mcos\,\theta_1}$$

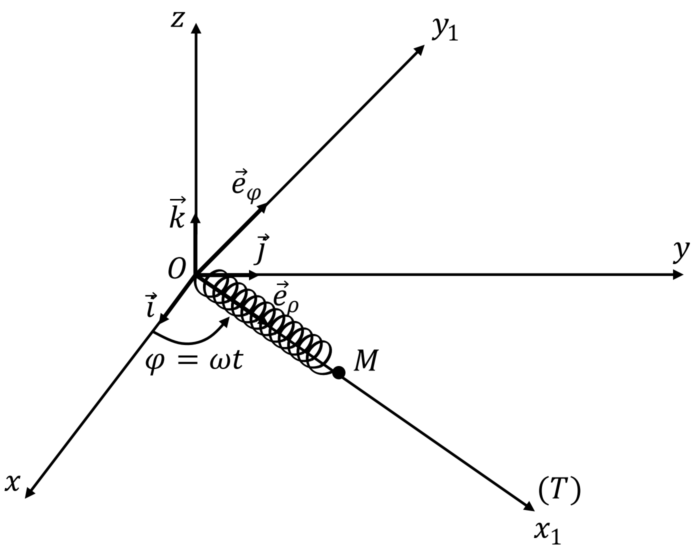
Pour $\theta_e = \theta_2$, compte tenu des conditions initiales, la solution de l'équation du mouvement est donnée par :

$$u(t) = u_0 cos(\omega t) \text{ avec } \omega_2 = -\frac{k}{mcos\,\theta_2}$$

Exercices complémentaires

Exercice 9

Dans un référentiel galiléen $\mathfrak{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, un point matériel M de masse m est accroché à l'une des extrémités d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ρ_0. L'autre extrémité du ressort est fixée en O. Le point M glisse sans frottement sur une tige horizontale (T) qui reste confondue avec l'axe (OX_1) d'un référentiel non galiléen $\mathfrak{R}_1(O,x_1,y_1,z_1)$ auquel est attachée la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$. La tige tourne avec une vitesse angulaire constante ω telle que $\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R})=\omega\vec{k}$. Le point M est repéré par : $\overrightarrow{OM}=\rho(t)\vec{e}_\rho$. A l'instant $t=0$, on donne $\rho=\rho_0$ et la vitesse relative de M, $\vec{V}(M/\mathfrak{R}_1)=\vec{0}$. L'accélération de la pesanteur est telle que $\vec{g}=-g\vec{k}$.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho\ ,\ \vec{e}_\varphi\ ,\vec{k})$.

Etude du mouvement de M dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$:

1) Calculer la vitesse relative et l'accélération relative de M.

2) Calculer les accélérations d'entrainement et de Coriolis de M.

3) Donner les expressions des forces appliquées à M dans $\mathfrak{R}_1$.

4) Ecrire le PFD appliqué à M dans $\mathfrak{R}_1$.

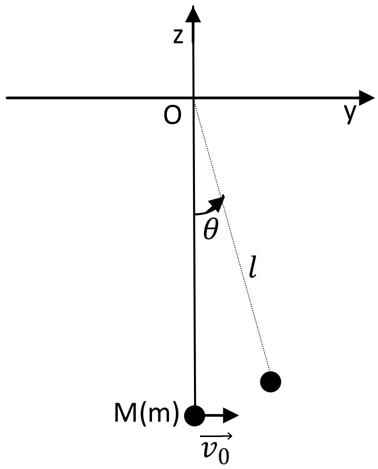
5) En projetant le PFD dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$:

a) Donner l'équation différentielle du mouvement de M.

b) Donner les composantes de la réaction $\vec{R}$.

Exercice 10

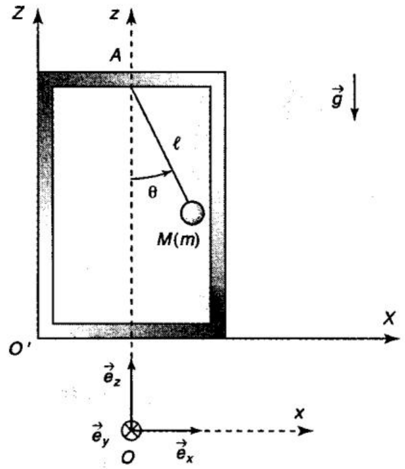
Le référentiel terrestre $R_g(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est supposé galiléen. Un pendule simple est constitué d'un objet ponctuel M de masse m, suspendu à un fil sans raideur et sans masse, de longueur l. Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme et la résistance de l'air négligeable. L'extrémité O du fil est fixe. A l'instant initial un expérimentateur lance M fil tendu à partir de la position d'équilibre stable avec une vitesse initiale horizontale v_0.



1- Etude cinématique : établir les expressions de $\vec{v}(M/R_g)$ et $\vec{a}(M/R_g)$ en précisant la base de projection adaptée au problème.
2- Etude énergétique : établir l'équation différentielle du mouvemùent de M étudié dans le plan de la figure.
3- Etude dynamique : établir l'expression de l'intensité T de la tension exercée par le fil sur M en fonction de m, g, l, θ et v_0.
4- Le fil reste tendu. Quelle valeur minimale v_{02}doit-on donner à $v_0$pour que le mouvement du pendule soit révolutif ? M tourne, dans ce cas, indéfiniment en décrivant des cercles de centre O et de rayon l dans le plan (Oyz).
5- Le fil reste tedu et $v_0 < v_{02}$. Pour quelle valeur de $\theta_0$de l'angle θ la vitesse de M s'annule-t-elle ? Quelle est alors l'expression de la tension du fil $T(\theta = \theta_0)$? En déduire la valeur maximale v_{01}que l'on doit donner à $v_0$pour que le mouvement du pendule soit oscillatoire ?
6- Une tige est fixée perpendiculairement au plan de la figure en un point C de l'axe (Oz) distant de d de l'origine O $(d < l)$. Le fil tendu, laché sans vitesse initiale d'une position faisant un angle α avec la verticale, heurte la tige lorsqu'il passe par sa position d'équilibre. Montrer que la vitesse de la particule M se conserve au cours du choc.
7- Le point M part de l'horizontale : $\alpha(t = 0) = -\pi / 2$. Pourquoi l'angle α est-il compté négativement ? Quelle est la condition sur le rapport l / d qui permet au fil de s'enrouler autour de la tige en restant tendu. Calculer la valeur de T juste avant et juste après le choc. Commenter le résultat.

Exercice 11

Un ascenseur est animé d'un mouvement de translation uniformément accéléré $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$ dans le référentiel terrestre $\Re\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ supposé galiléen. Le champ de pesanteur terrestre est uniforme et d'intensité g. Un pendule simple constitué d'un fil de masse négligeable et de longueur l est accroché en A; il porte à son autre extrémité un point matériel M de masse m et oscille dans le plan ($O'XY$) en restant tendu. Les frottements sont supposés négligeables.

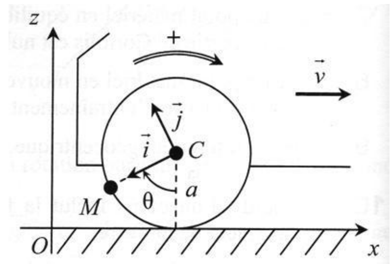


1. Le référentiel $\Re'$ de l'ascenseur est-il galiléen ?
2. Dans le référentiel $\Re'$ de l'ascenseur, effectuer le bilan des forces agissant sur M.
3. Etablir l'équation différentielle du mouvement de M en utilisant le théorème du moment cinétique en A dans le référentiel de l'ascenseur.
4. Retrouver cette équation différentielle en appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel de l'ascenseur.
5. Déterminer à nouveau l'équation différentielle du mouvement de M par une étude énergétique.
3. Quelle est la période T des petites oscillations de ce pendule ? Que se passe-t-il si l'ascenseur est en chute libre ?

Exercice 12

Une dame roule en voiture sur une route rectiligne, selon l'axe (Ox) et vers les x croissants, à une vitesse v constante. On note R le référentiel terrestre lié au repère Oxyz.

À un instant t = 0, elle roule sur un caillou M qui se trouvait au point O, et ce caillou se coince alors dans le pneu de l'une des roues, de centre C et de rayon extérieur a. On cherche à déterminer la trajectoire de M par rapport à R. Pour cela, on introduit un second référentiel R' lié à la voiture, donc au repère Cxyz.



1) La roue roulant sans glisser sur la route, de quelle distance dx avance la voiture sur le sol lorsque la roue tourne d'un angle dθ ? En déduire la relation entre v et $\dot{\theta}$.

2) Déterminer l'angle θ(t) entre la verticale descendante et [CM], en prenant θ(0) = 0.

3) Quel est le mouvement de R' par rapport à R ? Quel est le mouvement de M dans R' ?

4) Déterminer, avec les lois de composition, les vecteurs vitesse et accélération de M dans R en fonction du temps. On pourra utiliser comme intermédiaire la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{e_y})$ telle que $\overrightarrow{CM} = a\vec{i}$.

5) Déterminer les équations paramétriques x(t) et z(t) de la trajectoire de M dans R. Représenter cette trajectoire sur un schéma (cette courbe s'appelle une cycloïde).

6) Après quelques tours de roue, le caillou se détache soudainement de la roue : part-il vers l'avant ou vers l'arrière (par rapport au sol) ?

Exercice 13

Un point A se déplace sur un cercle Cde rayon r, de centre 0 ; C est vertical et tourne autour d'un de ses diamètres (Oz) à la vitesse angulaire constante ω. Soit :

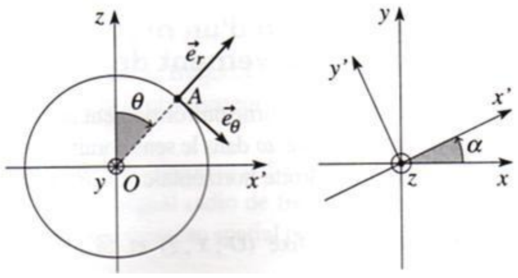
$\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OA})$

α l'angle entre un plan vertical fixe (xOz) et le plan du cercle ;

R le référentiel fixe (0;x,y,z),

R' le référentiel (0 ; x', y', z') lié au cercle.

Tous les vecteurs seront exprimés dans la base $(\overrightarrow{e'_x}, \overrightarrow{e'_y}, \overrightarrow{e'_z})$ liée au référentiel tournant R', sauf indication contraire.



1) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OA}$. En déduire par le calcul direct les vecteurs vitesse et accélération de M dans R, exprimés dans la base de R'.

2) Exprimer en fonction de θ les vecteurs vitesse et accélération de A par rapport à R' dans la base des coordonnées polaires sur le cercle, puis dans la base de R'.

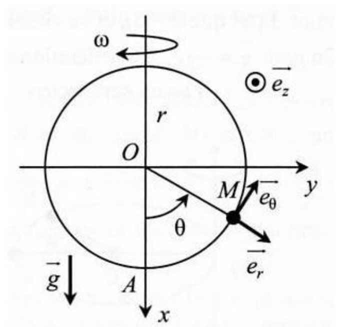
3) Déterminer la trajectoire du point coïncidant P dans le référentiel R. Exprimer alors la vitesse
d'entraînement et les accélérations d'entraînement et de Coriolis du point A .

4) En déduire, en appliquant les lois de composition des vitesses et des accélérations, les vecteurs vitesse et accélération de A par rapport à R, exprimés dans la base de R'. Montrer que l'on retrouve bien le résultat de la question 1.

Exercice 14

Un guide circulaire de centre O et de rayon r est en rotation uniforme, caractérisé par $\vec{\Omega} = \omega\overrightarrow{e_x}$, autour de son diamètre vertical (Ox), par rapport au référentiel terrestre galiléen R. Le référentiel d'étude est le référentiel C lié au cercle : le repère Oxyz est lié à ce référentiel.

Un anneau de masse m, assimilé à un point matériel M, est astreint à coulisser sans frottement sur la circonférence. Son mouvement dans S est repéré par un seul degré de liberté cinématique, l'angle θ entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$. On note $\vec{g} = g.\overrightarrow{e_x}$ le champ de pesanteur, et $\vec{R}$ la réaction du cercle sur M.



1) Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans le référentiel C, et donner les composantes de ces forces (connues ou inconnues) dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.

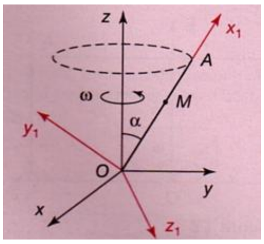
2) Écrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et en déduire l'équation différentielle vérifiée par θ(t), ainsi que l'expression de $\vec{R}$ en fonction de θ, de ses dérivées et des paramètres du problème.

3) Indiquer la ou les position(s) d'équilibre de M dans ce référentiel.

Exercice 15

Une tige OA tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical Oz, en faisant un angle α constant avec cet axe Oz. Un anneau de masse m, assimilé à un point matériel M, est susceptible de glisser sans frottement le long de la tige.

On note R_1, le référentiel lié à la tige, d'axes Ox_1 (selon OA), Oy_1 (orthogonal à Ox_1, dans le plan xOz) et Oz. À l'instant t = 0, le point M d'abscisse x(0) = x_0 est lâché sans vitesse initiale par rapport à la tige.



1) Établir l'équation du mouvement de M dans le référentiel R_1.

2) Exprimer l'abscisse x, en fonction de t.

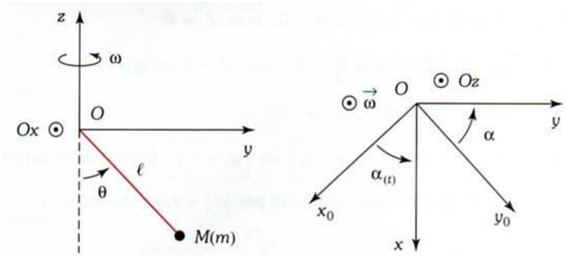
3) Déterminer la réaction $\vec{R}$ exercée par la tige sur l'anneau.

Exercice 16

Le mouvement d'un pendule simple de masse m et de longueur t est étudié dans un référentiel R (Ox. Oy, Oz), Oz étant vertical ascendant.

La position du point M est repérée par la déviation angulaire θ(t) par rapport à la verticale. On pose $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Le référentiel R est susceptible de tourner à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz du référentiel galiléen $R_0(O_{x0}, O_{y0}, Oz)$.



1) Un moteur permet d'imposer une vitesse angulaire constante ω_0 de rotation du référentiel R autour de Oz. Quelle est la valeur de l'angle θ_e correspondant à l'équilibre du pendule dans le référentiel tournant R ?

2) a) Le moteur est arrêté à l'instant t = 0, tel que : $\omega(0) = \omega_0$, $\theta(0) = \theta_e$ et $\dot{\theta}(0) = \Omega_0$

Exprimer les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis subies par le point matériel M dans R. Écrire l'équation vectorielle du mouvement de M dans R.

Montrer que $\theta(t)$ est lié à $\omega(t)$ par la relation $\omega.\sin^2\theta = cte$.

b) Établir l'équation différentielle du mouvement en $\theta(t)$.

c) On supposera que $\theta(t)$ reste voisin de θ_e : $\theta = \theta_e + \varepsilon$, avec $\varepsilon << \theta_e$.

Déterminer l'expression de θ en fonction de t.

BIBLIOGRAPHIE

- J. M. Brébec et al., Mécanique 1ère année MPSI-PTSI, Hprépa, Hachette livre, 2003.
- A. Gibaud & M. Henry, Cours de physique : Mécanique du point, 2e édition, Dunod, Paris, 2007
- J. M. Brébec et al., Exercices et problèmes de Physique, Hprépa, Hachette livre, 2010.
- A. M. Clausset & F. Clausset, Physique MPSI-PTSI, Dunod, Paris, 2011..

Exercices et examens résolus: Mécanique du Point Matériel

M. BOURICH

Ce recueil d'exercices et problèmes examens résolus de mécanique du point matériel est un support pédagogique destiné aux étudiants de la première année de l'école National des Sciences Appliquées de Marrakech. Ces exercices couvrent les quatres chapitres du polycopié de cours de la mécanique du point matériel :

- Outil mathématique : vecteurs et systèmes de coordonnées,
- Cinématique du point matériel,
- Dynamique du point matériel
- Théorèmes généraux,

Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés.

M. BOURICH, Docteur ès Sciences, Enseignant chercheur à l'École Nationale des Sciences Appliquées-Marrakech, Spécialité : Énergétique, membre du laboratoire Mécanique des Fluides et Énergétique de la Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech.

On ne peut rien apprendre aux gens. On peut seulement les aider à découvrir qu'ils possèdent déjà en eux tout ce qui est à apprendre.

Citation de **G. Galilée**